Lakša simulacija državnog natjecanja 2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

22. listopada 2020.

1. Odredi sumu:

$$\left\lfloor \frac{2^0}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^1}{3} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{2^{2020}}{3} \right\rfloor$$

gdje $\lfloor x \rfloor$ označava najveći cijeli broj manji od x.

2. Neka su a, b, $c \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $0 \leq a$, b, $c \leq 1$. Dokaži nejednakost:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1.$$

3. Odredi najmanji prirodan broj $n \geq 4$ takav da za svaki skup S koji sadrži točno n cijelih brojeva postoje 4 (različita) broja a, b, c i d iz S za koje je $a + b - c - d$ djeljiv s 20.

4. Dan je paralelogram $ABCD$ i u njemu točka X tako da vrijedi $|\angle AXB| + |\angle CXD| = 180°$. Odredi vrijednost izraza:

$$|\angle XAB| + |\angle XDC| + |\angle CXB|.$$

5. 23 prijatelja igra nogomet. Prvo izaberu suca koji će momčadi podijeliti u 2 tima od 11 ljudi. Znamo da je težina svakog od njih prirodan broj i da je, bez obzira tko je sudac, uvijek moguće napraviti 2 ekipe jednake ukupne težine. Dokaži da su svi prijatelji iste težine.

1. Pokušat ćemo svaki izraz $\left\lfloor \frac{2^n}{3} \right\rfloor$ zapisati kao razlomak bez neugodnih zagrada, takvim postupkom bi nam se neke varijable mogle pokratiti. Primijetimo da:

$$2^{2k} \equiv 1 \pmod 3$$
$$2^{2k+1} \equiv 2 \pmod 3$$

Ovo znači da $\left\lfloor \frac{2^{2k}}{3} \right\rfloor = \frac{2^{2k}-1}{3}$ i $\left\lfloor \frac{2^{2k+1}}{3} \right\rfloor = \frac{2^{2k+1}-2}{3}$

Naša suma se zapravo pretvara u

$$\sum_{i=0}^{2020} \left\lfloor \frac{2^i}{3} \right\rfloor = 0 + \sum_{i=1}^{1010} \left(\frac{2^{2i-1}-1}{3} + \frac{2^{2i}-2}{3} \right) = \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{2020} 2^i \right) - 1010$$
$$= \frac{1}{3}(2^{2021}-2) - 1010$$

2. Naša nejednakost je ekvivalentna s

$$a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \leq 1$$

Iskoristimo uvjet $a \leq 1$ tj. $a^2 \leq a$, pa sada imamo:

$$a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \leq a(1-b) + b(1-c) + c(1-a)$$

Primijetimo sada da:

$$\begin{aligned} a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) &= a + b + c - ab - bc - ac \\ &= 1 - (1 - a - b - c + ab + bc + ac - abc) - abc \\ &= 1 - (1-a)(1-b)(1-c) - abc. \end{aligned}$$

Zbog toga što vrijedi $1 - a \geq 0$ i $abc \geq 0$ slijedi

$$1 - (1-a)(1-b)(1-c) - abc \leq 1$$

čime smo dokazali nejednakost.

Bitno je primijetiti da se jednakost postiže za $a = b = 1$ i $c = 0$.

3. Jasno je da svaki skup koji sadrži 4 broja koji svi daju isti ostatak pri dijeljenju s 20 zadovoljava svojstvo.

Također je jasno da svaki skup u kojem postoje 4 broja a, b, c, d takva da a i c daju isti ostatak pri dijeljenju s 20, i b i d daju isti ostatak pri dijeljenju s 20, zadovoljava svojstvo.

Promotrimo 7 brojeva koji svi daju različite ostatke pri dijeljenju s 20. Od njih možemo napraviti $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ par. Zbrojimo li prvi i drugi član para u svim parovima, jasno je da ćemo dobiti 21 zbroj. Po Dirichletovom principu zato slijedi barem 2 zbroja imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20.

Dokažimo da se u ta 2 para ne nalazi isti broj. Pretpostavimo suprotno: neka su (x, y) i (x, z) parovi čiji zbrojevi daju isti ostatak pri dijeljenju s 20. Vrijedi

$$x + y \equiv x + z \pmod{20}$$

odnosno

$$y \equiv z \pmod{20}$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom da tih 7 brojeva svi daju međusobno različite ostatke pri dijeljenju s 20.

Zaključujemo da u svakom skupu koji sadrži 7 brojeva koji daju različite ostatke modulo 20 sigurno postoje barem 2 para (a, b) i (c, d) tako da vrijedi

$$a + b \equiv c + d \pmod{20}.$$

Drugim riječima, takav skup zadovoljava svojstvo.

Pronađimo najmanji n takav da skup n cijelih brojeva nužno zadovoljava svojstvo. To vrijedi za $n = 9$, jer ako postoji 7 brojeva koji svi daju različiti ostatak pri dijeljenju s 20, gotovi smo. Inače u skupu imamo najviše 6 različitih ostataka modulo 20.

Imamo 2 slučaja:

1° Postoje neka 2 ostatka pri dijeljenju sa 20 koja se oba pojavljuju više od jednom pa smo gotovi.

2° Neki se ostatak pojavljuje najmanje 4 puta, pa smo gotovi.

Dokazali smo da svaki skup cijelih brojeva sa 9 članova zadovoljava svojstvo.

Sada je lagano za $n = 8$ konstruirati protuprimjer $1, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$.

4. Docrtajmo točku X' t.d. je $XBCX'$ isto tako paralelogram.
Sada primijetimo da je onda i $AXX'D$ paralelogram, pa vrijedi $|DX'| = |AX|$, $|CX'| = |BX|$ i $|DC| = |AB|$, pa slijedi

$$\triangle AXB \cong \triangle DX'C.$$

Sada vidimo da vrijedi

$$\angle DX'C + \angle DXC = \angle AXB + \angle DXC = 180°,$$

dakle $DXX'C$ je tetivan četverokut.

Koristeći tetivnost i paralelogram $XBCX'$ dobivamo

$$\angle XDC = \angle XX'C = \angle XBC \ i \ \angle XAC = \angle X'DC = \angle XCB.$$

Iz ovoga zaključujemo da je suma početnih kuteva 180°.

5. Označimo s $a_1, a_2 \ldots a_{23}$ težine osoba i $S = a_1 + a_2 \cdots + a_{23}$.

Uvjet zadatka nam govori da ako maknemo osobu sa težinom a_i, ostatak možemo staviti u dvije ekipe težine X. Stoga

$$S - a_i = 2X.$$

To nam govori da S i a_i imaju istu parnost.

Budući da ovo možemo napraviti za svaki i, slijedi da su ili svi a_i parni, ili svi neparni.

Napravit ćemo niz $b_1, b_2 \ldots, b_{23}$ novih težina koji zadovoljava uvjete zadatka.

1° Ako su a_i parni uzmimo $b_i = \frac{a_i}{2}$.

2° Ako su neparni $b_i = a_i - 1$.

Očito novi niz zadovoljava uvjete zadatka i $b_i \geq 0$ za sve i. Ako svi a_i nisu 0 suma b_i je strogo manja od sume a_i. Ako nastavimo ponavljati postupak, u svakom koraku suma težina se smanjuje pa ćemo u jednom trenutku dobiti niz koji se sastoji samo od nula.

Kako ovo možemo napraviti, zaključujemo da su sve težine na početku bile jednake, jer su i na kraju jednake, a ova transformacija čuva jednakost brojeva.