

Lakša simulacija državnog natjecanja 2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

24. listopada 2020.

1. Odredi sve konačne skupove S pozitivnih prirodnih brojeva za koje vrijedi da ako su $i, j \in S$ (može biti $i = j$) onda je i $\frac{i+j}{M(i,j)} \in S$. $M(a,b)$ označava najveći zajednički dijelitelj brojeva a i b .
2. Odredite sve proste brojeve p , q i r takve da je $p^{2q} + q^{2p} = r$.
3. Neka su a i b pozitivni realni brojevi. Odredi maksimum od

$$\min \left\{ a, \frac{1}{b}, \frac{1}{a} + b \right\}$$

4. Dan je $\triangle ABC$ s opisanom kružnicom Ω . Neka su D i E točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom takve da vrijedi $|AD| = |AE|$. Neka pravci paralelni s DE kroz B i C sijeku Ω redom u točkama P i Q . Neka je w kružnica opisana $\triangle ADE$. Dokaži da se pravci PE i QD sijeku na w .
5. Neka je n prirodan broj veći od 2. Odredi sve skupove A s n elemenata takvih da suma elemenata niti jednog nepraznog podskupa od A nije djeljiva sa $n + 1$.