Teža simulacija državnog natjecanja 2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

24. listopada 2020.

1. $P(x)$ je normirani polinom trećeg stupnja sa nultočkama $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Ako za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi to da $\alpha^k + \beta^k + \gamma^k \in \mathbb{Z}$, dokaži da su onda svi koeficijenti od $P(x)$ cijeli brojevi.

2. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) takve da je $0 < x \leq y$ i vrijedi:

$$\sqrt[2020]{x^{2020} + y^{2020}} = (\sqrt[2020]{2} - 1)x + y$$

3. Postoji li aritmetički niz od 2020 prirodnih brojeva t.d. je svaki član tog niza potencija nekog prirodnog broja veća od 1?

4. Neka je O središte kružnice opisane $\triangle ABC$. Neka je kružnica Ω proizvoljna takva da prolazi kroz B i C. Neka su D i E redom presjeci pravaca BO i CO s Ω unutar $\triangle ABC$. Okomice iz D i E redom na stranice AB i AC sijeku se u M. Dokaži da su točke A, M i O kolinearne.

5. U ravnini je $2^{2020} + 1$ točaka. Na svakoj dužini koja spaja neke dvije točke nalazi se broj iz skupa $0, 1, ..., 2^{2020} - 1$. Za svake 3 točke A, B i C u ravnini vrijedi da je jedan od brojeva na dužinama $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$ zbroj druga dva. Dokaži da postoji trokut u ravnini kojemu na svim stranicama pišu nule.

1. Koristeći Vieteove formule dobivamo da je dovoljno pokazati da su izrazi

$$\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma,\ \alpha\beta\gamma$$

cijeli brojevi.

Uvedimo supstituciju $a=\alpha, b=\beta, c=\gamma$.
Označimo $p=a+b+c,\ q=ab+bc+ac,\ r=abc$

$k=1 \implies p\in\mathbb{Z}$
$k=2 \implies p^2+2q\in\mathbb{Z} \implies 2q\in\mathbb{Z}$, pa je $q=\frac{t}{2}$, $t\in\mathbb{Z}$
$k=3 \implies 3r-3pq\in\mathbb{Z} \implies 12pr-12p^2q\in\mathbb{Z}$
$k=4 \implies q-4pr\in\mathbb{Z} \implies 3q-12pr\in\mathbb{Z}$

Zbrajanjem zadnja 2 izraza dobivamo $-12p^2q+3q\in\mathbb{Z}$ tj.

$$\frac{t}{2}(3-12p^2)$$

je cijeli broj. Budući da je $(3-12p^2)$ uvijek neparan, t mora biti uvijek paran, odnosno $q\in\mathbb{Z}$.

Sada još trebamo pokazati $r\in\mathbb{Z}$.

$k=3 \implies 3r\in\mathbb{Z}$, pa je $r=\frac{l}{3}$, $l\in\mathbb{Z}$
$k=4 \implies 4pr\in\mathbb{Z} \implies pr\in\mathbb{Z}$
$k=6 \implies 3r^2+pr(p^2-3q)\in\mathbb{Z} \implies 3r^2\in\mathbb{Z}$

Dakle, sada znamo $\dfrac{l^2}{3}\in\mathbb{Z}$, pa $3\mid l$, pa je $r\in\mathbb{Z}$ čime smo gotovi sa zadatkom.

2. Dokazat ćemo nejednakost

$$\sqrt[n]{x^n+y^n}\le(\sqrt[n]{2}-1)x+y, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Zapišimo nejednakost kao

$$\sqrt[n]{x^n+y^n}\le\sqrt[n]{2}x+(y-x).$$

Iz uvjeta zadatka znamo da je $y-x\ge 0$. Sada ćemo cijelu nejednakost podići na n-tu potenciju.

$$x^n+y^n \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{2})^k x^k (y-x)^{n-k} = 2x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{2})^k x^k (y-x)^{n-k}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$y^n \leq x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{2})^k x^k (y-x)^{n-k}$$

Primijetimo da je $(\sqrt[n]{2})^k > 1$ za sve prirodne n i k.

Zbog toga je

$$RHS \geq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (y-x)^{n-k} = (x + (y-x))^n = y^n,$$

gdje se jednakost postiže ako je $x = y$, što su uistinu sva rješenja jednadžbe.

3. Tvrdimo da je odgovor da. Konstruirat ćemo takav niz.
Uzmimo bilo koji aritmetički niz prirodnih brojeva $a_1, \ldots, a_{2020}$ razlike $d > 0$. Primijetimo da je i $(Ta_1, \ldots, Ta_{2020})$ aritmetički niz prirodnih brojeva za bilo koji $T \in \mathbb{N}$.
Tražimo T oblika $T = a_1^{\alpha_1} \cdots a_{2020}^{\alpha_{2020}}$. Neka je $b_i = Ta_i$. Tada $b_i = a_i \prod_{j=1}^{2020} a_j^{\alpha_j}$.
Sada ćemo odrediti eksponente α_i. Neka su $q_1 < q_2 < \cdots < q_{2020}$ fiksni prosti brojevi. Za svaki $1 \leqslant i \leqslant 2020$, $\alpha_i \equiv -1 \pmod{q_i}$. Za svaki $j \neq i$, $\alpha_j \equiv 0 \pmod{q_i}$.
Po Kineskom teoremu o ostacima, takvi brojevi zaista postoje.
Konačno, dobivamo da je b_i q_i-ta potencija prirodnog broja za svaki i, čime završavamo konstrukciju.

4. Neka kružnica Ω siječe AB i AC redom u F i G.
Neka je $E' = EF \cap BC$. Tada vrijedi $\angle E'FG = \angle ACO = 90^\circ - B \implies \overline{EFE'} \perp AC \implies E' \equiv E_1$, dakle E, F, E_1 su kolinearne. Analogno dobijemo da su D_1, G, D kolinearne, pa je M ortocentar trokuta

ΔAGF.
Iz toga znamo $AM \perp FG$. Kako je $FGBC$ tetivan, lako dobijemo $\angle GFA = \angle ACB = 90° - \angle FAO$, iz čega slijedi $AO \perp FG$, dakle točke A, M, O su kolinearne, što je trebalo dokazati.

5. Tvrdnju dokazujemo za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$.

Svaku dužinu obojimo plavo ako je na njoj paran broj, a crveno ako je neparan. Primijetimo da imamo trokute samo s 0 ili 2 crvene stranice.

Dokazat ćemo da točke možemo podijeliti u 2 skupa, S_1 i S_2, tako da su sve dužine u svakom skupu plave. Uzmimo neku crvenu dužinu $\overline{AB}$ i pokušajmo konstruirati takva 2 skupa.

Ako ne postoji crvena dužina, možemo točke podijeliti u 2 skupa samo s plavim dužinama.

U suprotnom, promatramo neku treću točku X. Očito A i B moraju biti u različitim skupovima, pa stavimo A u S_1, a B u S_2. Znamo da je točno jedna od dužina $\overline{AX}$ i $\overline{BX}$ plava, pa X stavimo u S_1 ako je $\overline{AX}$ plava, a u S_2 ako je $\overline{BX}$ plava.

Po Dirichletovom principu, jedan od skupova S_1 i S_2 ima barem $2^{n-1}+1$ točaka koje su sve međusobno spojene plavim dužinama.

Sada u tom skupu brojeve na svim dužinama podijelimo s 2 i ponovimo opisani postupak podjele točaka na 2 skupa samo s plavim dužinama sve dok nam ne ostane skup od 3 točke. Te 3 točke povezane su dužinama na kojima su brojevi 0 ili 1, a zbog konstrukcije skupa, znamo da su sve dužine plave, odnosno na njima je broj 0. Time je zadatak završen.