S1	lakša grupa

Predavanja subotom
sezona 2020./2021.

Uvodno predavanje

Nika Utrobičić

31.10.2020.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

U ovom ćemo predavanju proći puno različitih tipova zadataka iz raznih natjecateljskih područja. Mnoge će teme koje ćemo danas spomenuti biti detaljnije obrađene u budućim predavanjima: danas je cilj da se podsjetimo što više uobičajenih strategija za rješavanje zadataka na natjecanjima.

1 Algebra

Faktorizacija Često će nam biti korisno faktorizirati izraze. neki identiteti koje pritom možemo koristiti:

- Kvadrat i kub binoma:
$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$
$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$
- Kvadrat trinoma:
$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$
- Razlika kvadrata te zbroj i razlika kubova:
$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$
$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$
- *Potencija binoma (sjetimo se Pascalovog trokuta):
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$
- identitet Sophie Germain:
$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$$
- $$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Svođenje nejednakosti na kvadrat Kada rješavamo nejednakosti, često je korisno zapisati neke članove kao potpune kvadrate. Primjenom nejednakosti $x^2 \geq 0$ ponekad možemo u potpunosti riješiti zadatak, ponekad je to samo korak u rješenju.

Nejednakosti među sredinama Nejednakosti među sredinama su možda i najvažnije nejednakosti s kojima ćete se susresti. Zadaci na srednjoškolskim natjecanjima uvijek se mogu riješiti njihovim korištenjem, dok poznavanje nekih kompliciranijih nejednakosti može biti korisno, ali nije i nužno.

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ **pozitivni** realni brojevi. Tada je njihova:

- harmonijska sredina
$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
- geometrijska sredina
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$
- aritmetička sredina
$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
- kvadratna sredina
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Nejednakosti među sredinama odnose se na činjenicu da za ovako definirane sredine vrijedi

$$K \geq A \geq G \geq H$$

, a najčešće se koristi $A \geq G$. Jednakost se postiže za $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Zadaci

1. Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su
$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \quad \text{i} \quad B = \frac{x(x^2-1) - y(y^2-1)}{x - y}.$$
Odredi koji je broj veći, A ili B.

2. Dokaži da ne postoje pozitivni realni brojevi x i y za koje vrijedi
$$(x^3 + y^3)(x^2 + y^2) = 2(x + y) = 2.$$

3. Izračunaj zbroj
$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$$

4. Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju sustav jednadžbi
$$x + y - z = -1$$
$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$
$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1$$

5. Ako su x, y, z i w realni brojevi takvi da vrijedi
$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + x + 3y + 5z + 7w = 4$$
odredi najveću moguću vrijednost izraza $x + y + z + w$

2 Kombinatorika

Matematička indukcija Matematička indukcija je metoda dokazivanja koja funkcionira tako što za najmanji mogući slučaj dokažemo da vrijedi, te dokažemo da ako tvrdnja vrijedi za neki slučaj, vrijedi i za sljedeći. Ovo radimo na konačnim i prebrojivo beskonačnim skupovima.
Vizualizirati je možemo dominama: dokažemo li da će u nizu domina prva pasti te da će, ako neka domina padne, pasti i sljedeća, po principu matematičke indukcije možemo zaključiti da će pasti sve domine.
Provodi se u 3 dijela:

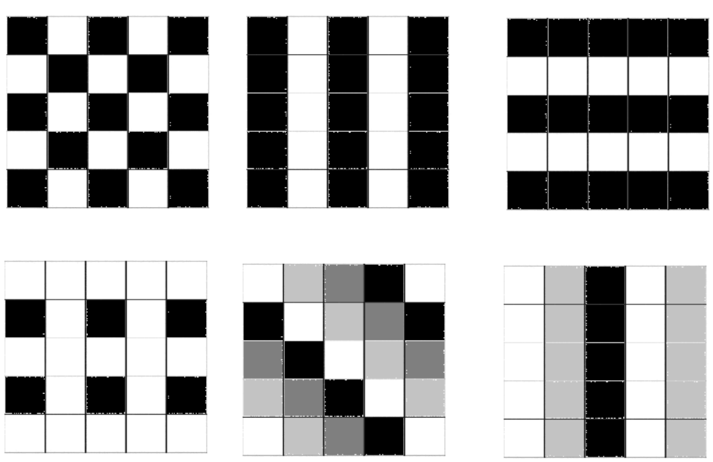
- **BAZA:** u ovom dijelu dokazujemo da tvrdnja vrijedi za najmanji slučaj, najčešće $n = 1$.
- **PRETPOSTAVKA:** u ovom dijelu pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za neki n.
- **KORAK:** u ovom dijelu koristeći pretpostavku dokazujemo da tvrdnja vrijedi za neki $n + 1$.

Bitno je napomenuti da matematičku indukciju primjenjujemo u svakakvim zadacima, ne isključivo kombinatornim.
Ideje za rješavanje zadataka indukcijom:

- jaka indukcija - pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $x \leq n$, u koraku dokažemo da onda vrijedi i za n.
- veći korak - u bazi dokažemo da tvrdnja vrijedi za $n \leq x$, gdje je x neki fiksni prirodni broj. Dokažemo da ako tvrdnja vrijedi za n, vrijedi za $n + x$.
- Cauchyjeva indukcija - dokažemo da ako tvrdnja vrijedi za n, vrijedi za $2n$. Dokažemo da ako tvrdnja vrijedi za n, vrijedi i za $n - 1$.

Invarijante i monovarijante U nekim se zadacima susrećemo sa sustavom koji se mijenja po određenim pravilima. Često nas se pita možemo li primjenom pravila doći do nekog stanja. U takvim je zadacima često korisno potražiti invarijantu ili monovarijantu. Invarijanta je veličina koja se, tijekom nekog procesa, ne mijenja, a monovarijanta veličina čija vrijednost stalno opada ili stalno raste (ili stalno ne raste ili stalno ne opada). Tada možemo usporediti
Neke potencijalno korisne ideje za invarijante ili monovarijante: parnost brojeva, broj parnih brojeva, djeljivost nekim brojem, zbroj brojeva, djeljivost zbroja nekim brojem, zbroj kvadrata brojeva, opseg, površina, broj elemenata na polju određene boje (zapravo je metoda bojanja pronalaženje invarijante)

Bojanja i popločavanja Česti su zadaci u kojima nam je zadana neka ploča i nekakav lik, a pitanje je možemo li popločati ploču tim likovima. Takve zadatke najčešće rješavamo metodom koju zovemo bojanje.
Bojanje u ovom kontekstu znači dijeljenje nekog skupa na više podskupova, primjerice ploče na crna i bijela polja. Ovu metodu često koristimo kad želimo doći do kontradikcije: prebrojavanjem elemenata po podskupovima zaključujemo da ih je u nekom podskupu neodgovarajući broj elemenata, dakle ploča se ne može popločati takvim likovima.



Na ovoj slici možete vidjeti neka potencijalno korisna bojanja.

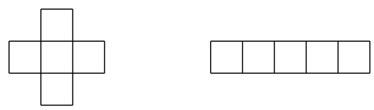
Princip ekstrema Često je u zadacima korisno pogledati element koji je minimalan ili maksimalan (ekstreman) po nekom svojstvu. Najčešće se princip ekstrema koristi za dokazivanje metodom kontradikcije. To radimo na način da pretpostavimo da je neki element maksimalan (ili minimalan) te pronađemo neki drugi element koji je veći (ili manji) od njega.

Dirichletov princip Dirichletov princip je pravilo koje kaže da ako $nk + 1$ kuglicu stavimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalazi barem $k + 1$ kuglica.

Zadaci

6. Ploča 8×8 na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različitih boja, kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od osam polja u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu ili obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

7. Dana je ploča s 2016 redaka i 2017 stupaca. Je li moguće ukloniti dva polja u zadnjeg stupcu te ploče tako da dobiveno ploču možemo prekriti bez preklapanja pločicama oblika kao na slici? Pločice je dozvoljeno rotirati.



8. Od n točaka u ravnini nikoje 3 ne čine trokut površine veće od 1. Dokažite da se sve te točke mogu prekriti trokutom površine ne veće od 4.

9. Dokažite da među bilo kojih 6 ljudi postoje 3 osobe koje se sve ili međusobno poznaju, ili ne poznaju. Napomena: poznanstva su uzajamna.

10. Dva igrača, A i B igraju sljedeću igru: A i B zapisuju naizmjenično po jednu znamenku sve dok ne napišu šesteroznamenkasti broj, pri čemu se niti jedna znamenka ne smije ponoviti. Prva znamenka mora biti različita od 0. Igrač A igra prvi, a znamenke se pišu redom slijeva nadesno. Igrač A pobjeđuje ako je napisani šesteroznamenkasti broj djeljiv s 2, 3 ili 5, a u suprotnom pobjeđuje igrač B. Dokaži da igrač A ima strategiju za pobjedu, tj. može pobijediti neovisno o igri igrača B.

11. U prostoriji se nalazi n kutija visina $1, 2, 3, ..., n$ koje treba nekim poretkom smjestiti uz zid. Mačak Fiko može skočiti s jedne kutije na sljedeću ako je sljedeća kutija niža (nije bitno koliko) od one na kojoj se nalazi ili je za najviše 1 viša od one na kojoj se trenutno nalazi. Na koliko načina se kutije mogu poredati tako da Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju?

3 Geometrija

Poučci o sličnosti i sukladnosti Ne zaboravimo na njih, često su nam korisni. Za sukladnost to su SSS, SKS, KSK i SSK (dvije stranice i kut nasuprot veće), a za sličnost KK, SKS i SSS.

Poučak o simetrali kuta Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica.

Tetivni četverokuti Često je korisno uočavati tetivne četverokute (četverokute kojima se može opisati kružnica). Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- četverokut $ABCD$ je tetivan
- simetrale stranica četverokuta $ABCD$ sijeku se u jednoj točki (koja je tada središte njemu opisane kružnice)
- $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, odnosno $\angle BCD + \angle DAB = 180°$
- $\angle ABD = \angle ACD$, odnosno $\angle ADB = \angle ACB$, odnosno $\angle BAC = \angle BDC$, odnosno $\angle CAD = \angle CBD$.

Poučak o obodnom i središnjem kutu Obodni kutevi nad nekim lukom kružnice su međusobno jednaki i dvostruko manji od pripadajućeg središnjeg kuta.

Poučak o tetivi i tangenti Kut izmedu tangente kružnice kojoj je diralište u krajnjoj točki tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.

Potencija točke Neka je T točka kružnice k i neka se tetive te kružnice, AB i CD, sijeku u T. Tada vrijedi

$$|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$$

. Umnošci s lijeve i desne strane jednakosti nazivaju se potencijom točke T u odnosu na kružnicu k.

Zadaci

12. Točke M i N se nalaze redom na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ tako da je $|\angle BMA| = |\angle NMC| = 60°$. Odredi kut $\angle MAN$.

13. Dan je trapez $ABCD$. Simetrala kraka $\overline{BC}$ siječe krak $\overline{AD}$ u točki M, a simetrala kraka $\overline{AD}$ siječe krak $\overline{BC}$ u točki N.

    Neka su O_1 i O_2 redom središta kružnica opisanih trokutima ABN i CDM. Dokaži da pravac O_1O_2 prolazi polovištem dužine $\overline{MN}$.

14. Na stranici BC šiljastokutnog trokuta ABC dana je točka D .Simetrala kuta $\angle CAD$ siječe stranicu BC u točki E. Kružnica opisana trokutu ABD siječe dužinu AE točkama A i F, a pravac BF siječe stranicu AC točki G. Pravac kroz točku G paralelan s DF siječe stranicu BC točki H. Dokaži da je pravac GE tangenta kružnice opisane trokutu BHG

4 Teorija brojeva

Korisne ideje u zadacima iz teorije brojeva:

- faktorizacija
- promatranje djeljivosti
- promatranje ostataka pri dijeljenju s nekim brojem
- smještanje među kvadrate
- dijeljenje s najvećim zajedničkim djeliteljem da dobijemo relativno proste brojeve

Zadaci

15. Odredi sve proste brojeve p za koje je $2^p + p^2$ također prost broj.

16. Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takvih da je $4 \cdot 3^{2m} + 5 = n^2$.

17. Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

18. Dokaži da ne postoji prirodni broj k takav da su

$$k + 4 \quad \text{i} \quad k^2 + 5k + 2$$

    kubovi nekih prirodnih brojeva.

19. Neka su a i b prirodni brojevi različite parnosti. Dokaži da broj $(a+3b)(5a+7b)$ nije kvadrat prirodnog broja.

1. sredi algebarski razlomak
2. iskoristi formule za zbroj kubova i kvadrat binoma

3. teleskopiranje: prikaži svaki razlomak kao razliku neka 2 razlomka!
4. prvo iskoristi prvu jednadžbu, onda u drugoj iskoristi razliku kvadrata!
5. nadopunjavanje do kvadrata, A-K nejednakost
6. ne, pronađi invarijantu
7. možeš bojati i brojevima!
8. promatraj trokut maksimalne površine!
9. fiksiraj jednu osobu i promatraj njena poznanstva!
10. Nekako podijeli znamenke na 2 skupa: one koje želi A i one koje želi B.
11. Odredi rješenje promatrajući male slučajeve, pa ga dokaži matematičkom indukcijom.
12. rješenje je $45°$
13. ABNM je tetivni četverokut!
14. Dokaz ćeš provesti koristeći poučak o tetivi i tangenti. Dokaži da je BEGA tetivan!
15. ostatak pri dijeljenju kvadrata sa 3
16. ostatak pri dijeljenju kvadrata sa 3
17. faktoriziraj, najveći zajednički djelitelj
18. smještanje među kubove
19. djeljivost s 8

Izvor.

1. Županijsko 2015., 1. razred
2. Županijsko 2019., 1. razred
3. Županijsko 2017., 1. razred
4. Državno 1. razred, 2018.
5. Državno 2. razred, 2017.
6. Županijsko 1. razred, 2014.
7. Državno 2. razred, 2016.
8. MNM predavanje - princip ekstrema
9. MNM predavanje - dirichletov princip
10. Državno 1. razred, 2009.
11. Županijsko 4. razred, 2020.
12. Županijsko 1. razred, 2017.
13. Državno 2. razred, 2018.
14. Državno 4. razred, 2020.
15. Županijsko 2. razred, 2010.
16. Županijsko 3. razred, 2010.
17. Državno 2. razred, 2013.
18. Državno 3. razred, 2016.
19. Državno 3. razred, 2017.