KAGH nejednakosti

Mislav Brnetić

7.11.2020.

Uvod

KAGH nejednakosti (nejednakosti među kvadratnom, aritmetičkom, geometrijskom i harmonijskom sredinom) su jedne od temeljnih nejednakosti. Za početak, definirajmo kvadratnu, aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu:

- harmonijska sredina
$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
- geometrijska sredina
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$
- aritmetička sredina
$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
- kvadratna sredina
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. $x \geq y$ i $x \leq y \implies x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $x \geq y$ i $y \geq z \implies x \geq z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. $x \geq y$ i $a \geq b \implies x + a \geq y + b, \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$
4. $x \geq y \implies x + z \geq y + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
5. $x \geq y$ i $a \geq b \implies xa \geq yb, \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$
6. $x \geq 0$ i $y \geq 0 \implies xy \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0, x^2 = 0$ samo za $x = 0$

Između ovih sredina vrijedi nejednakost **za pozitivne realne brojeve**:

$$K \geq A \geq G \geq H$$

KA nejednakost vrijedi za sve realne brojeve.
Jednakost vrijedi (samo) za:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Dokaz.
Prvo dokazujemo AG nejednakost.
Dokažimo tvrdnju za $n = 2$.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

$$\iff (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2$$

$$\iff x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 \geq 4x_1 \cdot x_2$$
$$\iff x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 \geq 0$$
$$\iff (x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

što vrijedi.
Pokušajte dokazati za $n = 4$ koristeći ovu tvrdnju.
Dokažimo dalje indukcijom. Prvo ćemo dokazati da vrijedi za sve brojeve oblika $2^k, k \in \mathbb{Z}$, a zatim za sve ostale.
Baza je $n = 2$ (odnosno za $k = 1$) što smo ranije dokazali.
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

Želimo dokazati da tvrdnja vrijedi i za $2n$.

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}}$$

$$\iff \frac{x_1 + \cdots + x_{2n}}{n} \geq 2 \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}}$$

$$\iff \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \geq 2 \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}}$$

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}$$

Dovoljno je dokazati:

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}} \geq 2 \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}}$$

$$\iff \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} - 2 \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}} \geq 0$$

$$\iff (\sqrt[2n]{x_1 \ldots x_n} - \sqrt[2n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}})^2 \geq 0$$

što vrijedi.
S obzirom da ako tvrdnja vrijedi za n vrijedi i za $2n$, odnosno 2^{k+1}, zaključujemo da vrijedi za svaki n oblika $2^k, k \in \mathbb{Z}$.
Sada preostaje dokazati da vrijedi i za ostale brojeve.
Sada nam je baza svaki n oblika $2^k, k \in \mathbb{Z}$.
Za svaku bazu smo već dokazali da vrijedi tvrdnja.
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ vrijedi:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

Sada želimo dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n - 1$.
Uvrstimo $x_n = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$.

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_{n-1} \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1}}$$

$$\iff (\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1})^n \geq x_1 \ldots x_{n-1} \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1}$$

$$\iff (\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1})^{n-1} \geq x_1 \ldots x_{n-1}$$

$$\iff \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 \ldots x_{n-1}}$$

Dakle, ako tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi i za $n - 1$.

Kako znamo da smo na ovaj način dokazali AG nejednakost za sve $n \in \mathbb{N}$?
Dokažite da jednakost vrijedi samo za $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Dokažite KA i GH nejednakost.

Lakši zadaci

1. Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

2. Dokažite da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

3. Neka je $a \geq 0$. Dokažite da za sve relne brojeve x, y, z za koje je $x + y + z = 0$ vrijedi nejednakost:

$$(1 + a^x)(1 + a^y)(1 + a^z) \geq 8$$

   Kada vrijedi jednakost?

4. Dokažite da za svaki realan broj x vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

   Kada vrijedi jednakost?

5. Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ac(a + c - 2b) \geq 0$$

Umjereni zadaci

6. Neka je x pozitivan realan broj. Odredite minimalnu vrijednost izraza

$$x + \frac{1}{x}$$

7. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}$$

8. Dokažite da za sve nenegativne realne brojeve a, b, c, d vrijedi nejednakost:

$$(a + b + c + d)^2 \geq 4(ab + bc + cd + da)$$

9. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve p, q vrijedi nejednakost:

$$(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geq 9pq$$

10. (**Nesbittova nejednakost**) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

11. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve vrijedi

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

12. Odredite minimum funkcije

$$F(x,y,z) = (x+y)(y+z)$$

Teži zadaci

13. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leq 4$$

14. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}$$

15. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c})$$

16. Pri vrhovima komada kartona u obliku kvadrata duljine stranice a odsijecimo jednake kvadrate duljine stranice x i od ostatka složoimo kutiju bez poklopca. Odredi x tako da kutija bude maksimalnog volumena.