T2	Teža grupa

Predavanja subotom
sezona 2020./2021.

CSB nejednakost

Ivan Sinčić

7.11.2020.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" matematicari.mnm

Uvod

Često se na matematičkim natjecanjima postavljaju zadaci s tekstom "Dokaži da za sve varijable s nekimsvojstvom vrijedi neka nejednakost". Za rješavanje takvih zadataka na županijskom natjecanju ili pogotovo na višoj razini, od natjecatelja se očekuje poznavanje nekih tvrdnji kao što su KAGH (nejednakosti između sredina) i CSB nejednakost. Prisjetimo se kako glasi KAGH te navedimo CSB.

Teorem 1 (KAGH)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \dots x_n > 0$. Tada vrijedi $K \geq A \geq G \geq H$, odnosno*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

Jednakost se postiže ako i samo ako vrijedi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Teorem 2 (CSB)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_n$ realni brojevi. Tada vrijedi*

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su nizovi x_i te y_i proporcionalni (u slučaju da niti jedna varijabla nije jednaka nuli, to znači da postoji $\mu > 0$ takav da je $y_i = \mu x_i,\ \forall i \in \{1, 2, \dots n\}$).

Dokaz. Promotrimo kvadratnu funkciju:

$$f(t) = (x_1t + y_1)^2 + (x_2t + y_2)^2 + \ldots (x_nt + y_n)^2 = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)t^2 + 2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)t + (y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

Budući da je nenegativna, ima najviše jednu realnu nultočku pa je njena diskriminanta manja ili jednaka od nule, odnosno

$$4(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 - 4(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \leq 0$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. Slučaj jednakosti se postiže samo ako $f(t)$ postiže vrijednost 0.

Napomena 1. Vrlo je korisno u nejednakostima priviknuti se na sigma notaciju koja skraćuje zapisivanje dugačkih izraza. Prethodno iskazane teoreme tada možemo zapisati na sljedeći način:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2$$

ili neformalno (za sebe na papiru):

$$\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \geq \frac{\sum x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod x_i} \geq \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

$$\sum x_i^2 \sum y_i^2 \geq \left(\sum x_iy_i\right)^2$$

Pređimo na neke primjere.

Primjer 1. *Dokaži da za sve* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

Rješenje. Primijenjujući CSB nejednakost dobivamo

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (\sqrt{a^2c^2} + \sqrt{b^2d^2})^2 = (ac + bd)^2$$

Primjer 2. *Dokaži da za sve realne brojeve* a, b, c *vrijedi* $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.

Rješenje. Zapišemo li 3 kao $1^2 + 1^2 + 1^2$, vidimo da možemo primijeniti CSB nejednakost:

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2$$

Primjer 3. *Dokaži da za sve realne brojeve* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *koji zadovoljavaju* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ *vrijedi*

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Rješenje. Koristeći dani uvjet nejednakost možemo zapisati u pogodnom obliku za CSB nejednakost:

$$(1 + 1 + \ldots + 1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \geq (1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \ldots + 1 \cdot a_n)^2$$

Osim standardnog oblika u kojem primjenjujemo CSB, još je bitna i Engel forma ili Titu's lema, pa nju iskazujemo sljedeće.

Teorem 3 (Engel forma)**.** *Neka su* $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ *te* $y_1, y_2, \ldots y_n > 0$. *Tada vrijedi:*

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}$$

Dokaz. Nejednakost se može zapisati kao

$$(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\left(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n}\right) \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$$

što je direktna posljedica CSB nejednakosti.

Zadaci

1. Neka su $a, b, c, d > 0$ takvi da je $a + b + c + d = 1$. Odredi minimalnu vrijednost izraza $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.
2. Dokaži da za sve $x, y, z \geq 0$ vrijedi
$$\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} + \sqrt{(y^2 + 1)(z^2 + 1)} + \sqrt{(z^2 + 1)(x^2 + 1)} \geq 2(x + y + z)$$
3. Dokaži da za $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ vrijedi nejednakost između sljedećih sredina:
   (a) kvadratne i aritmetičke.
   (b) aritmetičke i harmonijske.
4. Ako za realne brojeve x, y, z vrijedi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, odredi maksimalnu vrijednost izraza $x + 2y + 3z$.
5. Dokaži da za sve $a, b, c, d > 0$ vrijedi $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq a + b + c + d$.
6. **(Nesbitt)** Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve $a, b, c > 0$ vrijedi $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.
7. Dokaži da za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ vrijedi:
$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}$$

8. Dokaži da za sve $a, b, c \geq 1$ vrijedi $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}$.

9. Dokaži da za sve $a, b, c \geq 0$ vrijedi $a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leq \frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(a+c)}$.
   Uputa: pokažite najprije da za sve $a, b, c \geq 0$ vrijedi:
$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac)$$

10. **(Srbija 2017.)** Dokaži da za sve $a, b, c > 0$ takve da je $a + b + c = 1$ vrijedi:
$$a\sqrt{2b+1} + b\sqrt{2c+1} + c\sqrt{2a+1} \leq \sqrt{2 - (a^2+b^2+c^2)}$$

11. **(Michael Rozenberg, Samin Riasat)** Dokaži da za $x, y, z > 0$ vrijedi:
$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{x^2+xz+z^2} \geq \sqrt{2x^2+xy} + \sqrt{2y^2+yz} + \sqrt{2z^2+xz}$$

12. Dokaži da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1$.

13. **(Balkan MO 2005.)** Dokaži da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$ i odredi kada se postiže jednakost.

Hintovi

1. Pomnoži nejednakost s $a+b+c+d$.
2. $(x^2+1)(y^2+1) = (x^2+1)(1+y^2)$.
3. Prirodan broj n možemo zapisati kao zbroj n jedinica $n = 1+1+\ldots+1$.
4. Možemo li $(x+2y+3z)^2$ dobiti kao manju stranu CSB nejednakosti u kojoj koristimo izraz $x^2+y^2+z^2$ na većoj strani?
5. Pomnoži nejednakost s $a+b+c+d$.
6. Proširi razlomke sa svojim brojnicima.
7. Kvadriraj nejednakost.
8. Uvedi supstituciju tako da radiš s nenegativnim brojevima.
9. $a\sqrt{b+c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{ab+ac}$.
10. $a\sqrt{2b+1} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{2ab+a}$.
11. Iskoristi CSB na desnoj strani nejednakosti i smisli lemu koja će riješiti ostatak zadatka.
12. Algebarski manipuliraj razlomke tako da pređu na drugu stranu nejednakosti.
13. Namjesti Engel formu CSB nejednakosti.

Rješenja

1. Neka su $a, b, c, d > 0$ takvi da je $a + b + c + d = 1$. Odredi minimalnu vrijednost izraza $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

   Rješenje. Vrijedi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = (a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \overset{CSB}{\geq} (1 + 1 + 1 + 1)^2 = 16$$

   Jednakost se postiže za $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. □

2. Dokaži da za sve $x, y, z \geq 0$ vrijedi

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + \sqrt{(y^2+1)(z^2+1)} + \sqrt{(z^2+1)(x^2+1)} \geq 2(x + y + z)$$

   Rješenje. Koristeći CSB nejednakost vidimo da vrijedi $(x^2 + 1)(1 + y^2) \geq (x + y)^2$, pa koristeći tu lemu pod svakim korijenom lijeve strane dobivamo:

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + \sqrt{(y^2+1)(z^2+1)} + \sqrt{(z^2+1)(x^2+1)} \geq (x + y) + (y + z) + (z + x) = 2(x + y + z)$$

   □

3. Dokaži da za $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ vrijedi nejednakost između sljedećih sredina:

   (a) kvadratne i aritmetičke.

   (b) aritmetičke i harmonijske.

   Rješenje. (a) Kvadriramo li nejednakost i zapišemo li ju u pogodnom obliku dobivamo:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \iff n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$$

   Zadnja nejednakost slijedi iz CSB-a nakon što n zapišemo kao zbroj n jedinica.

   (b) Pomnožimo li obje strane s nazivnicima da se riješimo razlomaka dobivamo:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \iff (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

   Zadnja nejednakost direktno slijedi iz CSB nejednakosti.

   □

4. Ako za realne brojeve x, y, z vrijedi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, odredi maksimalnu vrijednost izraza $x + 2y + 3z$.

   Rješenje. Imamo da vrijedi

$$(x + 2y + 3z)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 3^2) = 14$$

   pa dobivamo gornju granicu $\sqrt{14}$. Jednakost se postiže za $(x, y, z) = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$. □

5. Dokaži da za sve $a, b, c, d > 0$ vrijedi $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq a + b + c + d$.

   Rješenje. Pomnožimo li obje strane nejednakosti s $a + b + c + d$ dobivamo da je dovoljno dokazati

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a}\right)(b + c + d + a) \geq (a + b + c + d)^2$$

   Zadnja nejednakost direktno slijedi iz CSB nejednakosti. □

6. **(Nesbitt)** Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve $a, b, c > 0$ vrijedi $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$.

   1. Rješenje. Koristeći CSB nejednakost vidimo da vrijedi

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)\Big(a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)\Big) \geq (a+b+c)^2$$

   Preostaje dokazati da vrijedi:

$$(a+b+c)^2 \geq \frac{3}{2}\Big(a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)\Big)$$

$$\iff a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \iff (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0$$

   □

   2. Rješenje. Proširimo li razlomke na lijevoj strani s njihovim brojnicima i iskoristimo li Engel formu CSB-a dobivamo da vrijedi

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{ab+bc} + \frac{c^2}{ac+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ac}$$

   te preostaje pokazati da vrijedi

$$\frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ac} \geq \frac{3}{2}$$

$$\iff a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \iff (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0$$

   □

   3. Rješenje. Danu nejednakost možemo zapisati na sljedeći način:

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

   Sada možemo izlučiti faktor $a+b+c$ iz svakog člana lijeve strane te nakon množenja s 2 dobivamo da je nejednakost ekvivalentna s:

$$\Big((b+c) + (a+c) + (a+b)\Big)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 9$$

   Zadnja nejednakost je direktna posljedica CSB nejednakosti. □

7. Dokaži da za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}$$

   Rješenje. Kvadriramo li obje strane nejednakosti, dobivamo da je potrebno dokazati:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \cdot \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} b_i b_j$$

$$\iff \sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{(a_i^2 + b_i^2)(a_j^2 + b_j^2)} \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i a_j + b_i b_j)$$

   Zadnja nejednakost slijedi iz primjene CSB nejednakosti na svaki član sume. □

8. Dokaži da za sve $a, b, c \geq 1$ vrijedi $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}$.

Rješenje. Uvedimo supstituciju $a = x + 1, b = y + 1, c = z + 1$. Vrijedi $x, y, z \geq 0$ te nejednakost postaje

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{(z+1)((x+1)(y+1)+1)}$$

Koristeći CSB nejednakost vidimo da vrijedi

$$(z+1)(1+(x+1)(1+y)) \overset{CSB}{\geq} (z+1)(1+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2) \overset{CSB}{\geq} (\sqrt{z}+\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

što smo i htjeli pokazati. □

9. Dokaži da za sve $a, b, c \geq 0$ vrijedi $a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leq \frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(a+c)}$.
Uputa: pokažite najprije da za sve $a, b, c \geq 0$ vrijedi:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac)$$

Rješenje. Da bi dokazali lemu potrebno je samo raspisati obje strane i primijeniti AG nejednakost na sve preostale članove:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac) \iff a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \overset{AG}{\geq} 6abc$$

Sada možemo primijeniti lemu u danoj nejednakosti te ju zapisati u pogodnom obliku:

$$a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ac)}$$

$$\iff \sqrt{a}\cdot\sqrt{ab+ac} + \sqrt{b}\cdot\sqrt{bc+ac} + \sqrt{c}\cdot\sqrt{ac+bc} \leq \sqrt{(a+b+c)\Big((ab+ac)+(bc+ac)+(ac+bc)\Big)}$$

Zadnja nejednakost je direktna posljedica CSB nejednakosti. □

10. **(Srbija 2017.)** Dokaži da za sve $a, b, c > 0$ takve da je $a + b + c = 1$ vrijedi:

$$a\sqrt{2b+1} + b\sqrt{2c+1} + c\sqrt{2a+1} \leq \sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)}$$

Rješenje. Koristeći identitet $2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) = 1 - (a^2+b^2+c^2)$, nejednakost možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{2ab+a} + \sqrt{b}\cdot\sqrt{2bc+b} + \sqrt{c}\cdot\sqrt{2ac+c} \leq \sqrt{1+2ab+2bc+2ac}$$

Iskoristimo li sada CSB nejednakost na lijevoj strani, dobit ćemo

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{2ab+a}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{2bc+b}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{2ac+c} \leq \sqrt{(a+b+c)(2ab+a+2bc+b+2ac+c)} = \sqrt{1+2ab+2bc+2ac}$$

što smo i htjeli pokazati. □

11. **(Michael Rozenberg, Samin Riasat)** Dokaži da za $x, y, z > 0$ vrijedi:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{x^2+xz+z^2} \geq \sqrt{2x^2+xy} + \sqrt{2y^2+yz} + \sqrt{2z^2+xz}$$

Rješenje. Koristeći CSB desnoj strani nejednakosti dobivamo

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x+y} + \sqrt{y}\cdot\sqrt{2y+z} + \sqrt{z}\cdot\sqrt{2z+x} \leq \sqrt{(x+y+z)(2x+y+2y+z+2z+x)} = (x+y+z)\sqrt{3}$$

pa preostaje pokazati da vrijedi

$$\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} + \sqrt{\frac{y^2+yz+z^2}{3}} + \sqrt{\frac{x^2+xz+z^2}{3}} \geq x+y+z$$

Primijetimo da smo gotovi ako dokažemo pomoćnu tvrdnju $\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}} \geq \frac{a+b}{2}$ za sve $a, b > 0$ jer ju tada možemo iskoristiti na svakom članu lijeve strane. Dokaz pomoćne tvrdnje ide raspisivanjem:

$$\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}} \geq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a^2+ab+b^2}{3} \geq \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \iff a^2+b^2 \geq 2ab \iff (a-b)^2 \geq 0$$

□

12. Dokaži da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1$.

Rješenje. Koristeći identitet $\frac{a}{2a+b} = \frac{1}{2} - \frac{b}{4a+2b}$, danu nejednakost možemo zapisati kao:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{b}{4a+2b} + \frac{c}{4b+2c} + \frac{a}{4c+2a} \iff 1 \leq \frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a}$$

Sada možemo svaki razlomak desne strane proširiti svojim brojnikom te primijeniti Engel formu CSB nejednakosti:

$$\frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} + \frac{a^2}{2ac+a^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2ab+b^2+2bc+c^2+2ac+a^2} = 1$$

□

13. **(Balkan MO 2005.)** Dokaži da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$ i odredi kada se postiže jednakost.

Rješenje. Dokazat ćemo malo strožu tvrdnju u kojoj je brojnik desne strane zamijenjen s $(\max(a,b,c) - \min(a,b,c))^2$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $(\max(a,b,c) - \min(a,b,c))^2 = (a-b)^2$. Nejednakost se može zapisati kao:

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(c-b)^2}{c} + \frac{(a-c)^2}{a} \geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Kako u Engel formi CSB nejednakosti nije bitno jesu li brojevi u brojnicima koje kvadriramo na većoj strani pozitivni ili negativni, primjenom te nejednakosti na sva tri člana ne moramo pisati apsolutnu vrijednost oko izraza $a-b, c-b, a-c$, već ih možemo same takve zbrojiti i to nam daje tvrdnju zadatka:

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(c-b)^2}{c} + \frac{(a-c)^2}{a} \geq \frac{(a-b+c-b+a-c)^2}{a+b+c} = \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Da bismo odredili slučaj jednakosti, potrebno je ispitati kada se jednakost postiže u svim koracima u kojima smo koristili nejednakost (ovdje smo koristili jednu nejednakost - Engel formu CSB-a). Imamo:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-b}{b} = \frac{a-c}{a}$$

Označimo li $x = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, dobivamo jednadžbu trećeg stupnja iz koje možemo odrediti sve moguće vrijednosti od x te tako naći sve slučajeve jednakosti:

$$\frac{1}{x^2} - 1 = 1 - x \implies (x-1)(x^2-x-1) = 0$$

Pri nalaženju svih trojki koje zadovoljavaju jednakost treba paziti da smo imali BSO pretpostavku te treba uzeti u obzir cikličke zamjene varijabli (račun provedite za DZ). □