

## Uvod

U ovom predavanju svladat ćemo tehnike za rješavanje sustava nelinearnih jednađžbi; naglasak će biti na sustavima u kojima se traže realna rješenja. Potrebne osnovne tehnike mogu se podijeliti u tri glavna dijela.

**Algebarski identiteti.** Prvo, spomenimo neke poznate algebarske identitete koji se često koriste. Uobičajeno ih je koristiti u oba smjera (tj. ponekad ćemo htjeti neki izraz faktorizirati, a ponekad obrnuto):

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) & a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) & a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}) \\ a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

U ovim izrazima  $a, b$  su proizvoljni realni brojevi, a  $n$  je prirodan. Uočite da se neki izrazi mogu faktorizirati na više načina, npr. vrijedi

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) \\ &= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \\ &= (a^3 - b^3)(a^3 + b^3), \end{aligned}$$

pri čemu smo redom koristili formule za razlike šestih potencija, razliku kubova i razliku kvadrata. Primijetite da neki rastavi izgledaju jednostavnije od drugih, te da se neki još mogu rastavljati dalje na faktore.

**Faktoriziranje algebarskih izraza.** Na prethodni odlomak prirodno se nastavlja ovaj. U zadacima je vrlo često od koristi rastaviti neki algebarski izraz na faktore, a pogotovo ako nam na jednoj strani jednakosti ostane nula. Naime, tada odmah znamo da je jedan od faktora jednak nuli, a ti faktori su redovito jednostavniji od cijelog početnog izraza, pa je lakše s njima raditi. Pri faktorizaciji često koristimo prethodno navedene identitete, ali treba imati na umu još nekoliko stvari.

Vrlo često u zadacima je potrebno faktorizirati izraz oblika  $x^2 + bx + c$ , gdje je  $x$  nepoznanica, a  $a, b, c$  su zadani realni brojevi. Za one koji se još nisu susreli s nalaženjem rješenja kvadratne jednađžbe, može se primijeniti sljedeći pristup. Ovakav izraz htjeli bismo faktorizirati, tj. napisati u obliku  $(x + x_1)(x + x_2)$ , tj. želimo naći realne brojeve  $x_1, x_2$  takve da vrijedi

$$x^2 + bx + c = (x + x_1)(x + x_2).$$

Izmnožimo li desnu stranu, dobit ćemo

$$x^2 + bx + c = x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

Dakle, želimo da vrijedi  $b = x_1 + x_2$  i  $c = x_1x_2$ , tj. tražimo dva realna broja kojima je zbroj  $b$ , a umnožak  $c$ . Ako su  $b$  i  $c$  lijepo namješteni cijeli brojevi (a obično jesu), brojeve  $x_1, x_2$  ćemo lako naći pogađanjem.

Primjerice, želimo rastaviti na faktore izraz  $x^2 + 5x - 24$ . Na prvi pogled nije očito kako ovo rastaviti na faktore. No, sjetimo se da želimo naći (po mogućnosti cijele) brojeve  $x_1, x_2$  čiji je zbroj 5, a umnožak -24. Kako se nadamo

da su  $x_1, x_2$  cijeli, provjeravamo za  $x_1$  sve djelitelje od -24. Provjerom ustvrdimo da su -3 i 8 traženi brojevi, pa vrijedi  $x^2 + 5x - 24 = (x - 3)(x + 8)$ . Uočite da ovo još znači da su 3 i -8 rješenja jednadžbe  $x^2 + 5x - 24 = 0$ .

No, često se pojavljuju i puno kompliciraniji izrazi koje je potrebno faktorizirati. Teško je za sve mogućnosti dati neki "algoritam" kako to učiniti, pa često treba isprobavati razne mogućnosti. Jedan takav primjer slijedi.

Recimo da želimo faktorizirati izraz koji sadrži jednu nepoznanicu  $x$ , ali da se u izrazu pojavljuju kubne, četvrte ili veće potencije od  $x$ , npr.  $x^3 + x^2 + 2x - 4$ . U ovakvom slučaju možemo se nadati da jednadžbu  $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$  zadovoljava neki cijeli broj. Pretpostavimo da je upravo to slučaj. (Primijetimo da je u ovom primjeru sigurno  $x \neq 0$ .) Tada  $x|x^3 + x^2 + 2x$ , a kako  $x|0$ , onda  $x|4$ , tj.  $x$  je djelitelj od 4. Stoga je cjelobrojna rješenja dovoljno potražiti među djeliteljima broja 4, kojih je samo 6 (ne zaboravite i negativne djelitelje). Provjerom se lako uvjerimo da  $x = 1$  zadovoljava jednadžbu. Sličnom logikom kao u prethodnom primjeru zaključujemo da iz izraza možemo izlučiti faktor  $x - 1$ , pa ga izlučujemo "na silu":

$$x^3 + x^2 + 2x - 4 = x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + 4x - 4 = (x - 1)(x^2 + 2x + 4).$$

Još nekoliko napomena za ovaj primjer. Prvo, da nismo našli djelitelj od 4 koji zadovoljava danu jednadžbu, ne možemo reći da ne postoji  $x$  koji ju zadovoljava, jer je ostalo puno neprovjerenih brojeva (svi realni koji nisu cijeli). No, ono što bismo sigurno znali je da nema cijelih brojeva koji ju zadovoljavaju, pa to znači da ne možemo naći ovako lijepi rastav na faktore. Drugo, ovakav postupak može se provesti kad god imamo zbroj potencija od jedne varijable  $x$ , no pritom ovi zaključci vrijede **isključivo kad su koeficijenti uz potencije uz  $x$  cijeli brojevi**. No, nasreću je to gotovo uvijek slučaj, pa vrijedi ovo zapamtiti.

**Simetrični i ciklički sustavi.** Kao što sam naziv upućuje, radi se o posebnim sustavima koji imaju neka posebna svojstva. *Sustav jednadžbi je simetričan ako zamjenom oznaka bilo kojih dviju varijabli dobivamo identičan sustav.* Konkretno na primjeru, pogledajmo sustav iz 4. zadatka: ako zamijenimo oznake za varijable  $x, y$ , sustav zapravo ostaje isti. U slučaju 5. zadatka, tu već imamo puno više parova varijabli koje bismo trebali formalno ispitati, no nekako je jasno da ako zamijenimo oznake npr. za  $a$  i  $d$  da ćemo dobiti isti sustav, jedino će jednadžbe biti drukčije poredane. Ako malo bolje pogledate, vidjet ćete da je velik dio sustava u ovom predavanju simetričan. Uz već prethodno navedene trikove, kod simetričnih jednadžbi možemo primijeniti još jedan, a to je poredati varijable po veličini. Naime, budući da sve varijable imaju "istu" ulogu u sustavu, možemo među njima uvesti "red" bez smanjenja općenitosti. Samo pritom ne smijemo zaboraviti zapisati sva rješenja na kraju zadatka, tj. i ona koja ne zadovoljavaju nužno točno taj pretpostavljeni "red".

Drugu važnu klasu sustava čine ciklički sustavi. Takav je recimo sustav u 9. zadatku. Iako na prvi pogled već uočavamo pravilnost u sustavu, on nije simetričan; naime, zamjenom oznaka varijabli  $x, y$  dobivamo ipak nešto drukčiji sustav. No, ako umjesto  $x$  pišemo oznaku  $y$ , umjesto  $y$  pišemo  $z$ , a umjesto  $z$  pišemo  $x$ , dobit ćemo isti sustav. *Ciklički sustavi su upravo takvi sustavi, u kojima zamjenom varijabli "u krug" dobijemo isti sustav.* Kod njih ne možemo bez smanjenja općenitosti poredati nepoznanice po veličini, no možemo odabrati najmanju ili najveću, što također može znatno pomoći.

Naravno, to ne znači da se simetrični i ciklički sustavi ne mogu riješiti drugim metodama, no simetrični i ciklički sustavi imaju neke svoje specifičnosti koje nam itekako mogu pomoći. Naime, gore opisana ideja rješavanja je korisna pri dokazivanju da nekih rješenja nema, ili da sve nepoznanice moraju biti jednake. To postizemo ograničavanjem nekih izraza, a u tome nam još dodatno mogu pomoći razne nejednakosti, od kojih ćemo na ovom predavanju koristiti samo činjenicu da je kvadrat realnog broja veći ili jednak od nule.

## Lakši zadaci

1. Odredite vrijednost izraza  $x^2 + y^2 + z^2$  ako je poznato da je  $x + y + z = 13$ ,  $xyz = 72$  i  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}$
2. Neka su  $a, b$  realni brojevi za koje vrijedi  $a^3 - 3ab^2 = 16$  i  $3a^2b - b^3 = 88$ . Odredite sve moguće vrijednosti izraza  $a^2 + b^2$ .
3. Riješite sljedeći sustav u skupu realnih brojeva:

$$xyz = x + y + z$$

$$yzt = y + z + t$$

$$ztx = z + t + x$$

$$txy = t + x + y$$

4. Nađite sve realne brojeve  $x, y$  takve da vrijedi  $x^2 + x = y^3 - y$  i  $y^2 + y = x^3 - x$ .
5. Odredite sve uređene četvorke realnih brojeva  $(a, b, c, d)$  za koje vrijedi

$$(b + c + d)^{2020} = 3a$$

$$(a + c + d)^{2020} = 3b$$

$$(a + b + d)^{2020} = 3c$$

$$(a + b + c)^{2020} = 3d$$

## Umjereni zadaci

6. Nađite sva realna rješenja sustava

$$x^3 - 3x = 4 - y$$

$$2y^3 - 6y = 6 - z$$

$$3z^3 - 9z = 8 - x$$

7. Nađite sve realne brojeve  $x, y$  za koje vrijedi  $x^8 - y^8 = x^2 - y^2 = 1$ .

8. Nađite sva rješenja sustava

$$a(a + 1) + b(b + 1) = 12$$

$$(a + 1)(b + 1) = 4$$

9. Nađite sve pozitivne realne brojeve  $x, y, z$  koji zadovoljavaju sljedeći sustav:

$$\frac{1}{xy} = \frac{x}{z} + 1$$

$$\frac{1}{yz} = \frac{y}{x} + 1$$

$$\frac{1}{zx} = \frac{z}{y} + 1$$

10. Nađite sve realne brojeve  $x, y$  takve da vrijedi

$$\frac{1}{x} + 2y = 1$$

$$2x^2 + \frac{1}{y} = 3$$

11. Odredite sve uređene trojke realnih brojeva  $(x, y, z)$  za koje vrijedi

$$(x^2 + 1)y = z^2 + 1$$

$$(y^2 + 1)z = x^2 + 1$$

$$(z^2 + 1)x = y^2 + 1$$

## Teži zadaci

12. Nađite sva realna rješenja sustava

$$(y + 1)\sqrt{2x - y} - x^2 + x + xy = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xy - 3x + 2 = 0$$

13. Nađite sve uređene trojke realnih brojeva  $(x, y, z)$  koje zadovoljavaju sljedeći sustav:

$$x^2 - yz = |y - z| + 1$$

$$y^2 - zx = |z - x| + 1$$

$$z^2 - xy = |x - y| + 1$$

14. Odredite sva pozitivna realna rješenja sustava

$$x^3 + 2y^2 + \frac{1}{4z} = y^3 + 2z^2 + \frac{1}{4x} = z^3 + 2x^2 + \frac{1}{4y} = 1$$

15. Nađite sve realne brojeve  $C$  takve da postoje međusobno različiti realni brojevi  $x, y, z$  za koje je ispunjeno

$$x + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = y + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} = z + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = C$$

16. Pretpostavimo da realni brojevi  $x, y, z$  zadovoljavaju

$$x + \frac{y}{z} = y + \frac{z}{x} = z + \frac{x}{y} = 2$$

Pokažite da izraz  $x + y + z$  može poprimiti isključivo vrijednosti 3 i 7.

*Napomena: ne morate pokazivati da takvi brojevi  $x, y, z$  zaista postoje.*

## Rješenja

### 1. Rješenje pod #2

2. Nakon što kvadriramo obje jednačbe, zbrojimo ih i sredimo dobijemo da vrijedi  $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 8000$ . Sada uočimo da je lijeva strana jednaka  $(a^2 + b^2)^3$ , iz čega slijedi da je  $a^2 + b^2 = 20$ .

3. Oduzimanjem prve i druge jednačbe te faktorizacijom dobivenog dobijemo da je  $(yz - 1)(x - t) = 0$ . Sada imamo 2 slučaja:

1. slučaj:  $yz - 1 = 0$ . Uvrštavanjem toga u prvu jednačbu dobivamo  $x = x + y + z$ , tj.  $z = -y$ . Iz  $yz = 1$  sada slijedi  $y^2 = -1$ , pa ovaj slučaj nije moguć.

2. slučaj:  $yz - 1 \neq 0$ , tj.  $x = t$ . Sada oduzimanjem druge i treće jednačbe dobijemo  $(zt - 1)(y - x) = 0$ , te zbog simetrije danog sustava na isti način zaključimo da je  $zt - 1 \neq 0$ . Dakle, mora biti  $y = x$ . Analogno ćemo oduzimanjem treće i četvrte jednačbe dobiti  $z = y$ . Stoga je  $x = y = z = t$ . Uvrštavanjem toga u prvu jednačbu dobijemo  $x^3 = 3x$ , tj.  $0 = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ . Sada zaključujemo da su sva realna rješenja sustava dana s  $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0), (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ .

### 4. Rješenje pod #2

### 5. Rješenje pod #6

### 6. Rješenje pod #2

7. Uočimo da vrijedi

$$x^8 - y^8 = (x^4)^2 - (y^4)^2 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4), \quad (1)$$

pri čemu smo dvaput iskoristili formulu za razliku kvadrata i činjenicu da je  $x^2 - y^2 = 1$ . Kvadriranjem potonjeg dobivamo

$$1 = (x^2 - y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4. \quad (2)$$

Uvedimo radi preglednosti oznaku  $a = x^2 + y^2$ . Kvadriranjem toga dobivamo

$$a^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4. \quad (3)$$

Zbrojimo (2) i (3) te dobivenu jednakost podijelimo s 2; dobivamo  $x^4 + y^4 = \frac{1}{2}(a^2 + 1)$ . Uvrstimo li to u (1), dobije se

$$1 = x^8 - y^8 = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = a \cdot \frac{1}{2}(a^2 + 1),$$

iz čega slijedi  $a^3 + a - 2 = 0$ . Lako se utvrdi da je  $a = 1$  jedno rješenje ove jednačbe, pa to znači da na lijevoj strani možemo izlučiti faktor  $a - 1$ . Stoga se lijeva strana faktorizira kao  $a^3 + a - 2 = (a - 1)(a^2 + a + 2) = (a - 1)((a + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4})$ . Kako taj izraz mora biti jednak 0, a druga zagrada je uvijek pozitivna, slijedi da je  $a = 1$ , tj.  $x^2 + y^2 = 1$ . Zbrojimo li to s  $x^2 - y^2 = 1$  dobivamo da je  $x^2 = 1$ , pa je  $x = 1$  ili  $x = -1$ . U oba ta slučaja je  $y = 0$ , pa sustav ima 2 rješenja:  $(x, y) = (1, 0), (-1, 0)$ .

8. **Izvor.** Sva rješenja su  $(a, b) = (3, 0), (0, 3), (-3, -3)$ .

### 9. Rješenje pod #2

10. Prvo se rješavamo nazivnika (pri čemu pamtimo da je  $x, y \neq 0$ .) Time dobivamo sustav

$$1 + 2xy = x \quad (1)$$

$$2x^2y + 1 = 3y \quad (2)$$

Sada se trudimo poništiti neke članove na lijevim stranama tih jednačbi. Prva mogućnost je da ih samo oduzmemo, npr. prvu od druge. Nakon što faktoriziramo lijevu stranu dobijemo

$$2xy(x - 1) = 3y - x \quad (3)$$

Druga mogućnost je da jednačbu (1) pomnožimo s  $x$  te od nje oduzmemo (2). Ovime smo u (2) poništili član  $2x^2y$ . Točnije, dobijemo

$$x - 1 = x^2 - 3y \quad (4)$$

Sada uočimo da zbrajanjem (3) i (4) opet vršimo jedno poništavanje; sada na desnoj strani. Usto, prebacivanjem svega na jednu stranu cijelu jednadžbu lako dovedemo do sljedećeg oblika:

$$(2xy + 1 - x)(x - 1) = 0$$

Imamo 2 slučaja:

1. slučaj:  $x = 1$ . Uvrštavanjem u prvu jednadžbu početnog sustava dobivamo  $y = 0$ , što ne može biti rješenje.
2. slučaj:  $x \neq 1 \Rightarrow 2xy + 1 - x = 0$ . Iz ovoga izrazimo  $y = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{x})$ , te to uvrstimo natrag u početni sustav. Prva jednadžba je automatski zadovoljena, dok se iz druge rješavamo nazivnika te naposljetku dobijemo  $2x^3 - 2x^2 - x + 3 = 0$ . Kandidati za cjelobrojna rješenja ove jednadžbe su  $\pm 1, \pm 3$ , te provjerom dobijemo da je  $x = -1$  jedno rješenje. Sada znamo faktorizirati lijevu stranu; dobijemo da je  $2x^3 - 2x^2 - x + 3 = (x + 1)(2x^2 - 4x + 3) = (x + 1)(2(x - 1)^2 + 1)$ . Desna zagrada je uvijek pozitivna, pa mora biti  $x + 1 = 0$ , tj.  $x = -1$ . Uvrštavanjem u početni sustav slijedi  $y = 1$ , i to je jedino rješenje sustava.

11. [Županijsko natjecanje 2019., zadatak A-4.4.](#)
12. [Rješenje pod #3](#)
13. [Rješenje pod #3. Radi jasnoće vidi i #4](#)
14. [Državno natjecanje 2016., zadatak A-2.4.](#)
15. [Rješenje pod #2](#)
16. [Rješenje pod #4](#)