L2	Lakša grupa

Predavanja subotom
sezona 2020./2021.

Tetivni četverokuti

Lucija Relić

14.11.2020.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Tetivni su četverokuti vrlo često koristan alat za rješavanje geometrijskih zadataka na natjecanjima i zato je dobro naučiti prepoznati ih u zadacima i znati primijeniti njihova svojstva. Prije nego što se upoznamo s njima prisjetimo se nekih pojmova i teorema.

Teorem o obodnom i središnjem kutu. Središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom.

Posljedice:

- Obodni kutevi nad istom tetivom su jednaki.
- **(Talesov teorem)** Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

Teorem (o kutu između tangente i tetive) Kut između tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.

Korisno je znati i sljedeće činjenice vezane uz karakteristične točke trokuta:

- Sve 3 simetrale stranica trokuta sijeku se u istoj točki (središte trokutu opisane kružnice O).
- Sve 3 simetrale unutarnjih kuteva trokuta sijeku se u istoj točki (središte trokutu upisane kružnice I).
- Visine u trokutu sijeku se u istoj točki (ortocentar trokuta H).
- Težišnica trokuta spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice. Težišnice trokuta sijeku se u istoj točki (težište trokuta T ili G) koja dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ gledajući od vrha.

Primjer 1. Dokažimo Teorem o kutu između tangente i tetive.

Rješenje. Promatramo kružnicu k i njenu tetivu $\overline{AB}$ te tangentu t na kružnicu k u točki B. Neka je S središte kružnice k i C neka točka na kružnici različita od A i B. Vidimo da točka C određuje obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$.

Označimo $|\angle ACB| = \gamma$. Po teoremu o obodnom i središnjem kutu dobivamo da je $|\angle ASB| = 2\gamma$. Budući da je trokut $\triangle ABS$ jednakokračan, vrijedi $|\angle ABS| = 90° - \gamma$, a jer je kut između polumjera $\overline{SB}$ i tangente pravi dobivamo da je kut između tangente i tetive jednak γ. □

Vrijeme je da napokon predstavimo i tetivne četverokute i njihova svojstva.

Definicija. Tetivni četverokut je četverokut kojemu se može opisati kružnica.

Karakterizacije *(tetivni četverokuti imaju ova svojstva, ali vrijedi i obrat, četverokut za koji vrijedi neko od navedenih svojstava je tetivan)*:

- zbroj nasuprotnih kuteva je 180°
- simetrale stranica četverokuta sijeku se u jednoj točki (ta točka je onda središte opisane kružnice)
- U četverokutu $ABCD$ vrijedi neka od ovih jednakosti kuteva (a ako vrijedi neka, vrijedi i svaka):
  - $|\angle ABD| = |\angle ACD|$
  - $|\angle ADB| = |\angle ACB|$

- $|\angle BAC| = |\angle BDC|$
  - $|\angle CAD| = |\angle CBD|$
- **(Ptolomejev poučak)** U četverokutu $ABCD$ vrijedi $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$.

Korisne tehnike pri rješavanju zadataka:

- *angle chase*, odrediti što više veličina kuteva
- docrtavanje pravaca, tako se mogu pronaći neki sukladni obodni kutevi što može pomoći prepoznati tetivni četverokut (također, docrtavanje dijagonala u tetivnom četverkutu generira puno sukladnih kuteva)
- zbog prve karaktertizacije tetivnih četverokuta znamo da je četverokut s nasuprotnim pravim kutevima tetivan
- kad god se pojave kružnice ima smisla potražiti tetivan četverokut

Prije nego što prijeđemo na zadatke riješimo još nekoliko primjera.

Primjer 2. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC te neka su D i E nožišta okomica iz točke I na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ tim redom. Dokažite da je četverokut $IECD$ tetivan.

Rješenje. Stranice trokuta zapravo su tangente na upisanu kružnicu, pa su kutevi $|\angle IEC| = |\angle IDC| = 90°$. Sada vidimo da četverokut IECD ima nasuprotne kuteve prave pa po karakterizaciji tetivnih četverokuta zaključujemo da je četverokut $IECD$ tetivan. □

Primjer 3. Osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.

Rješenje. Neka je H ortocentar trokuta ABC i T njegova osnosimetrična slika u odnosu na AB. Dovoljno je pokazati da je četverokut $ATBC$ tetivan. Označimo sa M, N i P redom nožišta visina na BC, AB i AC.

Neka je $|\angle ACB| = \gamma$. Budući da je $|\angle CPH| = |\angle CMH| = 90°$, četverokut $CPHM$ je tetivan. U tetivnom četverokutu zboj nasuprotnih kuteva je $180°$, pa je $|\angle PHM| = 180° - \gamma$, a zbog toga je i $|\angle AHB| = 180° - \gamma$ (vršni kutevi).

Točka T je osnosimetrična slika od H u odnosu na AB pa vrijedi $\triangle ABH \cong \triangle ABT$. Zbog toga imamo

$$|\angle ATB| = |\angle AHB| = 180° - \gamma.$$

Sada smo dobili da je zbroj nasuprotnih kuteva u četverokutu $ATBC$ jednak $180°$ ($|\angle ACB| + |\angle AHB| = 180°$) pa je četverokut $ATBC$ tetivan. □

Lakši zadaci

1. Točke A, B, C, D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $|\angle ABC| + |\angle CDE|$.
2. Jednakokračni trokut ABC, $|AB| = |AC|$, upisan je u kružnicu k Neka je D točka na osnovici $|BC|$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD, i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokažite da vrijedi $|EG| = |GF|$.
3. Neka je $ABCD$ četverokut takav da je $|AB| = |BC| = |CA|$ i $\angle CDA = 120°$. Dokažite da je $|BD| = |AD| + |CD|$.
4. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine BC siječe AB u točki E. Kružnica koja prolazi točkom E, vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe CD u točki G. Dokažite da su pravci AD i FG međusobno okomiti.

Umjereni zadaci

5. Točke E i F su redom polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$. Pravci BE i CF sijeku se u točki P. Dokažite da je $|AP| = |AB|$.

6. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.

7. U trokutu ABC neka su nožišta visina iz B i C redom točke D i E. Dokažite da je tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A paralelna s pravcem DE.

8. Neka je ABC jednakokračni trokut s osnovicom $\overline{BC}$. Simetrala kuta u vrhu B siječe krak $\overline{AC}$ u točki P. Ako kružnica koja prolazi točkama B, C i P raspolavlja krak $\overline{AB}$, odredite veličine kutova trokuta ABC.

9. Dan je šiljastokutan trokut ABC U kojem vrijedi $|AC| > |AB|$, a točka O je središte opisane kružnice. Simetrala kuta $\angle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Pravac okomit na pravac AD koji prolazi kroz točku B siječe pravac AO u točki E. Dokažite da točke A, B, D i E leže na istoj kružnici, tj. te točke su *konciklične*.

Teži zadaci

10. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC. Dokažite da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

11. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC, a točka O središte njemu opisane kružnice.Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO, dokažite da pravac TH prolazi polovištem dužine BC.

12. U trokutu ABC vrijedi $|AB| < |BC| = |CA|$. Točka M nalazi se na $\overline{AB}$ tako da je $|AM| = 2|BM|$. Neka je F polovište $\overline{BC}$, te H na $\overline{AF}$ tako da su MH i AF međusobno okomiti. Dokažite da je $\angle BHF = \angle ABC$.

Hintovi

1. Iskoristite prvu karakterizaciju tetivnih četverokuta i Talesov teorem.
2. Tetivni četverokut ABCF, obodni kutevi.
3. Iskoristiti Ptolomejev poučak.
4. Angle chase, obodni kutevi.
5. *HINT 1:* Uočavate li neke sukladne trokute? Pokušajte primijeniti SKS poučak o sukladnosti.
   HINT 2: ABPF je tetivan.
6. Pokažite da sjecište simetrale stranice i opisane kružnice leži na simetrali nasuprotnog kuta. Koristiti obodne kuteve (obodni kutevi nad istom tetivom su jednaki).
7. Dovoljno je pokazati da je kut između tangente u A i AB jednak kutu $\angle AED$.
8. Obodni kutevi nad tetivama iste duljine su jednaki. Iskoristite obodne kuteve.
9. Ekvivalentno je dokazati $\angle EAD = \angle EBD$.
10. *HINT 1:* Neka je M polovište od $\overline{AB}$. Treba pokazati da su točke S, R i M kolinearne. To ćemo pokazati ako pokažemo $\angle RSP = \angle MSP$.
    HINT 2: BQSM i PQSR su tetivni.
11. Pokažite da su $\triangle HPC$ i $\triangle PHB$ jednakokračni.
12. Spustite visinu na osnovicu i iskoristite svojstva težišta i srednjice.

Rješenja

1. 2016., opć 2A, 4.

2. 2016., žup 3A, 3.

3. Uočimo da je trokut ABC jednakostraničan, pa je $\angle ABC + \angle ADC = 60° + 120° = 180°$, tj. četverokut $ABCD$ je tetivan jer mu je zbroj nasuprotnih kuteva jednak $180°$. Koristeći Ptolomejev poučak na taj četverokut dobijemo $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$, pa zbog $|AB| = |BC| = |CA|$ vrijedi tvrdnja zadatka.

4. 2011., drž 1A, 4.

5. Pokazat ćemo da je četverokut $ABPF$ tetivan. Naime, po S-K-S poučku o sukladnosti je $\triangle BCE \cong \triangle CDF$, pa je $\angle ABP = 90° - \angle CBE = \angle BEC = \angle CFD = 180° - \angle AFP$, što povlači tetivnost. Nadalje, po S-K-S poučku o sukladnosti vrijedi i $\triangle BAF \cong \triangle CDF$, pa je $\angle CFD = \angle BFA$. Kako je četverokut $ABPF$ tetivan, slijedi $\angle BPA = \angle BFA$, pa kada spojimo sve što imamo vidimo da je $\angle BPA = \angle ABP$, zbog čega je $|AP| = |AB|$.

6. Neka je O središte opisane kružnice, P polovište stranice $\overline{AB}$ i S sjecište simetrale stranice $\overline{AB}$ (to je pravac OP budući da je središte opisane kružnice na simetrali stranice) sa opisanom kružnicom. Želimo pokazati $\angle ACS = \angle SCB$.
   Odmah vidimo da je četverokut $ASBC$ tetivan. Budući da su $\angle ACS$ i $\angle ABS$ kutevi nad (istom) tetivom $\overline{AS}$, vrijedi $\angle ACS = \angle ABS$. Simetrala stranice okomita je na tu stranicu, pa po SKS poučku o sukladnosti trokuta znamo da su trokuti ΔASP i ΔBSP sukladni ($\overline{SP}$ je zajednička stranica, $|AP| = |PB|$ po definiciji točke P i kut između njih je pravi). Iz toga slijedi $\angle ABS = \angle BAS$.
   Sada opet primijenimo isti trik s obodnim kutevima, ovaj puta nad tetivom $\overline{BS}$, i dobivamo $\angle SCB = \angle SAB = \angle ABS = \angle ACS$, što je i trebalo pokazati.

7. Uočimo da je $\angle CDB = \angle CEB = 90°$, pa zaključujemo da je četverokut $BCDE$ tetivan. Tvrdnju zadatka pokazat ćemo ako pokažemo jednakost kuteva uz pravac koji bi bio transverzala. Pokažimo da je kut između tangente u A i AB jednak kutu $\angle AED$.
   Po teoremu o kutu između tetive i tangente je kut između tangente u točki A i pravca AB jednak $\angle ACB$, što je obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$. Usto, jer je $BCDE$ tetivan zaključujemo da je $\angle DCB = 180° - \angle BED = \angle AED$. Sada zbog $\angle ACB = \angle AED$ slijedi tvrdnja zadatka.

8. Označimo s M polovište dužine $\overline{AB}$, te neka je $\angle ABC = \beta$. Četverokut $BCPM$ je tetivan, pa kako je pravac BP simetrala kuta $\angle ABC$, vrijedi $\angle PBM = \angle PBC = \frac{\beta}{2}$, pa je $|PM| = |PC|$ jer su obodni kutevi nad tetivama iste duljine jednaki. Iz jednakosti obodnih kuteva imamo da je $\angle MPB = \angle MCB = \beta - \angle PCM = \beta - \angle PBM = \frac{\beta}{2}$. Dakle, i trokut PMB je jednakokračan, tj. $|PM| = |BM|$.
   No, kako je M polovište $\overline{AB}$ vrijedi $|BM| = |AM| = \frac{|AB|}{2}$, a kako je $|PC| = |MP| = |BM|$ i $|AB| = |AC|$, vrijedi $|AP| = |AM|$. Sada smo jasno dobili da je $\triangle AMP$ jednakostraničan, pa je $\angle BAC = 60°$. Stoga zaključujemo da su svi kutevi u $\triangle ABC$ jednaki $60°$.

9. 2017., žup 2A, 4.

10. 2018., žup 4A, 3.

11. 2009., drž 4A, 1.

12. Označimo $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$. Neka je E nožište visine iz vrha C, i G sjecište CE i FH. Četverokut $EMGH$ je tetivan (kutevi $\angle GEM$ i $\angle GHM$ su pravi), i G je težište trokuta ABC, pa je $|GE| = \frac{1}{3}$, odakle je $|EM| = |EB| - |MB| = \frac{|AB|}{2} - \frac{|AB|}{3} = \frac{|AB|}{6} = \frac{1}{3}|BE|$.
    Po poučku SKS, trokuti EMG i EBC su slični, pa je $\angle EMG = \angle EBC = \alpha$. $\overline{EF}$ je srednjica trokuta ABC, pa je i $\angle FEB = \alpha$. Sada je $\angle EHF = 180° - \angle EMG = 180° - \alpha$, pa je $EBFH$ tetivan. Na kraju iz obodnih kuteva dobivamo $\angle BHF = \angle BEF = \alpha = \angle ABC$.