On Olimpijska grupa
Predavanja subotom
sezona 2020./2021.

Pascalov teorem

Borna Šimić

6. ožujak 2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" matematicari.mnm

Uvod

Iskazat ćemo i dokazati Pascalov teorem i neke povezane korisne tvrdnje, te riješiti par zadataka s njima.

Pascalov teorem

Neka su A, B, C, D, E, F točke na kružnici. Tada su sjecišta pravaca AB i DE, BC i EF te CD i FA kolinearna.

Teorem vrijedi i za točke na proizvoljnoj konici (elipsi, paraboli, hiperboli...) no ipak će najkorisniji biti slučaj za kružnicu. Međutim, par pravaca je također degeneriran slučaj konike, te na njemu dobivamo *Pappusov* teorem:

Neka su A, B, C točke na pravcu p, A', B', C' točke na pravcu q. Tada su sjecišta pravaca AB' i BA', BC' i CB' te CA' i AC' kolinearna.

Pripremni zadaci

1. Dokažite Pascalov teorem.
2. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Dokažite da su sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, sjecište pravaca AB i CD te sjecišta tangenata u A i D te u B i C kolinearna.

Zadaci

3. Neka je P točka u unutrašnjosti trokuta ABC. Neka su P_1, P_2 nožišta okomica iz P na AC i BC, a Q_1, Q_2 nožišta okomica iz C na AP i BP. Dokaži da se pravci Q_1P_2, Q_2P_1 i AB sijeku u jedno točki.
4. Neka je u trokutu ABC točka H ortocentar te M polovište $\overline{BC}$. Neka su D, E druga sjecišta CH i BH sa opisanom kružnicom trokuta ABC. Kružnica kroz D, E, H ponovno siječe MD i ME u točkama P i Q redom. Dokažite da su EP, DQ, MH konkurentni.
5. Neka je ABC trokut sa opisanom kružnicom Γ. Neka je M točka na simetrali kuta A unutar trokuta ABC. Pravci AM, BM, CM sijeku Γ ponovno u A_1, B_1, C_1. Neka pravac A_1C_1 siječe AB u P, a A_1B_1 siječe AC u Q. Pokaži da je $PQ \parallel BC$.
6. Neka su p_1, p_2, p_3, p_4 četiri pravca od kojih nikoja dva nisu paralelna. Neka je H_i ortocentar trokuta $p_ip_{i+1}p_{i+2}$ (indeksi su mod 4) za $1 \leq i \leq 4$.

   Dokaži da su H_1, H_2, H_3, H_4 kolinearni.
7. Dan je trokut ABC i točka M. Pravac kroz M siječe pravce AB, BC, CA u točkama C_1, A_1, B_1 redom. Pravci AM, BM i CM sijeku opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama A_2, B_2, C_2 redom. Dokaži da se pravci A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sijeku u jednoj točki na kružnici opisanoj trokutu ABC.
8. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut i O središte njegove opisane kružnice. Dijagonale AC i BD sijeku se u E. Ako je P točka unutar $ABCD$ takva da je

   $$|\angle PAB| + |\angle PCB| = |\angle PBC| + |\angle PDC| = 90^\circ$$

   dokaži da su točke O, E, P kolinearne.
9. U trokutu ABC, neka su D, E točke na pravcu D, E takve da je $\overline{AB} \subset \overline{DE}$, a točka A je između D i B te vrijedi $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$. Neka su M, N središta lukova AC i BC na kružnici opisanoj trokutu ABC koji ne sadrže treće vrhove. Pravci DM i CA sijeku se u P, a pravci EN i BC u Q. Dokaži da je I, središte upisane kružnice trokuta ABC, na pravcu PQ.

Hintovi:

1. Uvedite novi trokut i iskoristite Menelajev teorem.
2. Čista primjena Pascalovog teorema. Neke točke će se ponoviti.
3. Pronađi kružnicu za Pascala.
4. Primjena leme iz zadatka 2.
5. Dvostruka primjena Pascalovog teorema.
6. Pappus.
7. Uvedi drugo sjecište A_1A_2 i opisane kružnice.
8. Uvedi presjeke AP i sličnih sa opsianom kružnicom. Dvostruka primjena Pascalovog teorema.
9. Neka se DM, EN sijeku u R. Gdje je R?

Rješenja:

1. Rješenje (u uvodu)
2. Rješenje (u uvodu)
3. Rješenje (1. zadatak)
4. AoPS
5. Rješenje (5. zadatak)
6. Rješenje (uvod)
7. Rješenje (12. zadatak)
8. Rješenje (13. zadatak)
9. Rješenje (14. zadatak)