Capricciosa

O13	Olimpijska grupa

Predavanja subotom
sezona 2020./2021.

Ivan Novak

13. ožujka 2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" matematicari.mnm

1. Neka je F konačan skup čiji elementi su podskupovi od $\mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $\mathbb{N} \in F$, da za svaki $S \in F$ vrijedi $\mathbb{N} \setminus S \in F$, te da je unija svaka dva skupa iz F također u F. Odredi sve moguće vrijednosti koje može poprimiti broj elemenata od F.

2. Neka je $n \geqslant 2$ prirodan broj. U nekoj zemlji živi M ljudi, i svatko od njih ima svoj OIB. OIB je uređena četvorka brojeva iz skupa $\{1, \dots, n\}$. Nikoja dva čovjeka nemaju isti OIB. Također, vrijedi da ne postoji skup od n ljudi čiji OIB-ovi su isti na neke tri koordinate. Na primjer, za $n = 3$, ne koegzistiraju OIB-ovi $(1, 2, 3, 1), (1, 2, 3, 2), (1, 2, 3, 3)$ jer su isti na prve tri koordinate. Odredi najveću moguću vrijednost od M.

3. Neka su k, r i p prirodni brojevi takvi da je $k < r \leqslant p$, te je p prost. Na matematičkom natjecanju bilo je r zadataka i svaki zadatak nosi maksimalno $p - 1$ bodova. Koliko je najviše moglo biti natjecatelja, ako nikoja dva natjecatelja nemaju isti broj bodova na nekih k zadataka?

4. Neka su m, n i k prirodni brojevi veći od 1, te neka su $S_1, \dots, S_m$ različite uređene n-torke nula i jedinica. Pretpostavimo da za svaki i postoji j takav da S_i na nekoj koordinati ima jedinicu, a S_j nulu. Nadalje, pretpostavimo da za svaki $i \neq j$, S_i i S_j oba imaju jedinicu na točno k koordinata. Neka su $a_1, \dots, a_m$ cijeli brojevi takvi da je
$$a_1 S_1 + \ldots + a_m S_m = (0, \dots, 0).$$
Dokaži da je $a_1 = \ldots = a_m = 0$.

5. Neka su n i t prirodni brojevi. U nogometnoj ligi, svaka momčad ima najviše t različitih dresova. Svaki dres je obojan u točno jednu boju od n dostupnih, i za svaku od n boja postoji momčad koja ima dres te boje. Skup momčadi S je bojoidentificarujući ako svakoj momčadi iz S možemo pridružiti jedan njen dres, tako da ni jednoj momčadi iz S nije pridružen dres koji je jedan od dresova neke druge momčadi iz S.

   Odredi najveći prirodan broj $g(n, t)$ takav da uvijek postoji bojoidentificirajući skup veličine $g(n, t)$.

6. Dan je prirodan broj $M > 3$. Kažemo da je pravilni mnogokut sjajno obojan ako su mu sve stranice i dijagonale obojane u točno M boja tako da ne postoje tri vrha tog mnogokuta koji određuju trokut čije su stranice obojane u točno 2 boje.
   Neka je N najveći mogući broj vrhova sjajno obojanog mnogokuta.

   (a) Dokaži da je $N \leqslant (M - 1)^2$.
   (b) Dokaži da postoji sjajno obojan mnogokut s $(M - 1)^2$ vrhova ako je $M - 1$ prost.
   (c) Dokaži da postoji sjajno obojan mnogokut s $(M - 1)^2$ vrhova ako je $M - 1$ potencija prostog broja.

7. Neka su n i k prirodni brojevi takvi da je $n \geq k$, i neka je $\mathcal{F}$ skup konačnih skupova sa sljedećim svojstvima:

   (a) $\mathcal{F}$ sadrži barem $\binom{n}{k} + 1$ različitih skupova s točno k elemenata;
   (b) za bilo koja dva skupa $A, B \in \mathcal{F}$, njihova unija $A \cup B$ je također element skupa $\mathcal{F}$.

   Dokaži da $\mathcal{F}$ sadrži barem 3 skupa s barem n elemenata.

Rješenja

1. Na $\mathbb{N}$ definirajmo relaciju ekvivalencije $x \sim y$ koja znači 'ne postoji skup u F koji sadrži x a ne sadrži y'.

   Neka je C skup klasa ekvivalencije. Tada svakom skupu X iz F možemo pridružiti X', skup svih klasa koje siječe, što je podskup od C.

   Lako se vidi da $X \neq Y$ povlači $X' \neq Y'$, te da skup $P = \{X' \mid X \in F\}$ također zadovoljava svojstva koja je zadovoljavao F, te ima jednako mnogo elemenata. Također, za svaka dva različita elementa $c, d \in C$ postoji X' koji sadrži c a ne sadrži d.

   Dokažimo da je P zapravo skup svih podskupova od C. Za to je dovoljno vidjeti da su svi $\{c\}$ članovi P, gdje je c klasa. Promotrimo uniju svih elemenata P koji ne sadrže c. Tada sadrži sve klase osim c, pa je komplement tog skupa upravo $\{c\}$, iz čega slijedi tvrdnja.

   Kako je broj podskupova od C potencija broja 2, tvrdnja slijedi.

2. Baltic Way 2020, P8

3. Promotrimo zadatke 1,2,..., r. Ukupan broj mogućih rezultata na njima je p^r, a svaka dva natjecatelja imaju različit rezultat na njima, pa ne može biti više od p^r natjecatelja. Promotrimo sljedećih p^r k-torki cijelih brojeva modulo p (svaki od prvih r koeficijenata možemo izabrati na p načina) :

   $$(P(0), P(1), \dots, P(k-1)),$$

   gdje su P svi mogući polinomi stupnja manjeg od r modulo p.

   Tada se nikoje dvije k-torke ne poklapaju u r koordinata, jer bi onda nenul polinom stupnja manjeg od r imao r nultočaka, što je nemoguće.

4. Neka je x_i broj jedinica od S_i. Tada je $x_i > k$ jer u suprotnom bi S_i imao točno k jedinica, pa bi svi ostali S_j imali jedinice na tim istim mjestima, što je kontradikcija s uvjetom.

   Pomnožimo izraz
   $$a_1 S_1 + \ldots + a_m S_m = (0, \ldots, 0)$$
   redom sa S_i za svaki i. Dobijemo

   $$(a_1 + \ldots + a_m)k + a_i(x_i - k) = 0.$$

   Kako je $x_i > k$, znamo da su svi a_i istog predznaka, ali onda su očito svi jednaki 0.

   Napomena: iz ovog zadatka slijedi da mora vrijediti $m \leqslant n$, jer svaki skup od $n+1$ ili više n-torki ima netrivijalnu linearnu kombinaciju koja daje nul n-torku.

5. Promotrimo skup S najmanje kardinalnosti koji sadrži sve boje. Primijetimo $|S| \geq n/t$. Tada za svaki element tog skupa postoji boja koja nije sadržana ni u jednom drugom skupu, pa je $g(n,t) \geq n/t$.
   S druge strane, možemo uzeti bilo koji skup od $\lceil n/t \rceil$ momčadi takav da nikoje dvije momčadi nemaju isti dres i da su sve boje zastupljene. Dakle, odgovor je $\lceil n/t \rceil$.

6. Za a) dio, dovoljno je primijetiti da ako pretpostavimo suprotno, onda iz nekog fiksnog vrha ide barem $M-1$ bridova iste boje, pa zbog uvjeta imamo jednobojnu kliku veličine M. Međutim, ako gledamo fiksan vrh koji nije među tih M, on mora ili pripadati kliki (a to ne mogu svi vrhovi jer bismo onda koristili samo jednu boju) ili mora sa svakim vrhom iz klike biti spojen različitom bojom, i te boje ne smiju biti boje te klike, ali po Dirichletovom principu to nije moguće (M vrhova u kliki, $M-1$ preostalih boja).

   Za b) dio, promotrimo polje $\mathbb{F}_p$, gdje je $p = M-1$ prost broj, te vrhove mnogokuta označimo parovima (x, y) iz $\mathbb{F}_p^2$, te boje označimo sa $(a : b)$, gdje su a i b iz $\mathbb{F}_p$, a $(a : b)$ smatramo istim kao i $(c : d)$ kad god je $ad = bc$. Lako se može vidjeti da je broj boja točno $p+1$. Naime, to su boje $(x : 1)$ za $x \in \mathbb{F}_p$ te $(1 : 0)$.

Sada, obojimo brid koji povezuje (a, b) sa (c, d) bojom $(a - c : b - d)$. Lako se kratkim računom provjeri da je svaka boja korištena i da je svaki trokut s dvije istobojne stranice zapravo trokut s tri istobojne stranice, čime je tvrdnja dokazana.

Za c) dio, primijetimo da je jedina činjenica koju smo koristili bila ta da postoji polje s $M - 1$ elemenata, a kako postoji polje s p^n elemenata za svaki p prost i n prirodan, slijedi tvrdnja. Ako nekog zanima više o konačnim poljima, može pogledati ovdje: .

7. IMC 2016, P4