Matematičke igre

Andrija Tomorad
13.2.2021.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Tema ovog predavanja će biti zadaci u kojma dva igrača igraju igru u kojoj naizmjence povlače poteze, a (najčešće) onaj koji ne može povući potez izgubi te je pitanje tko ima pobjedničku strategiju. Najvažnije je dobro razumjeti logiku iza sljedećih pojmova.

Definicija 1

Kažemo da je pozicija pobjednička ako igrač, koji vuče potez iz nje (ne u nju), može povući potez koji mu garantira pobjedu (neovisno o igri drugog igrača). Pozicija je gubitnička ako neovisno o potezu koji igrač povuče iz nje, drugi igrač ima strategiju koja mu garantira pobjedu. Uočimo da je pozicija pobjednička ako i samo ako postoji gubitnička pozicija u koju se može doći iz nje.

Evo nekoliko alata za rješavanje teorije igara:
Indukcija - dokazujemo da je $f(A)$ gubitnička pozicija ako je A gubitnička pozicija i zaključujemo nešto principom indukcije.
Simetrija - pronalazimo da za svaki potez igrača A postoji strategija igrača B da uvijek nalazi odgovor i tako ne će izgubiti.
Invarijante i monovarijante - za neku strategiju promatramo način promjene ključnog parametra, te njegovu vrijednost na kraju i na početnoj poziciji, i pomoću toga dokazujemo da je pobjednička. Ovo ne će biti korisnije nego simetrija za razmišljanje, ali može biti korisno za formalizaciju rješenja.
Strategy-stealing - ako u nekoj igri X igrač A ima pobjedničku strategiju, a u igri Y igrač B može doći u poziciju ekvivalentu početnoj u igri X, igrač B ima pobjedničku strategiju u Y.

Oprez!

Važna razlika između teorije igara i ostale kombinatorike je sljedeća: da dokažemo da je neka strategija igrača A pobjednička, treba uzeti u obzir sve moguće poteze igrača B. Ako nađemo barem jedan način da igrač B pobjedi, strategija igrača A nije pobjednička, a nije ni strategija igrača B pobjednička jer potezi igrača A nisu generalizirani. To ne znači da se ne isplati pretpostaviti da je određena strategija pobjednička (čak i ako nije, možda se nađe nešto korisno u tom razmatranju). Osim strategija za koje mislimo da bi mogle biti pobjedničke, isplati se promatrati male primjere. No najčešće ne će biti korisno promatrati *random* nizove poteza, kao ni promatrati određene strategije oba igrača odjednom (razlog je već navedena logička osnova pobjedničke strategije), tj. ne će biti uvijek beskorisno, može se uočiti neka ideja, ali samo po sebi nije korak prema rješenju.

Lakši zadaci

1. Vlatka i Vlatko igraju igru s pravokutnom pločom dimenzija $a \times b$ cm^2 i žetonima koji su međusobno istog radijusa r. U potezu je dozvoljeno staviti jedan žeton na ploču da se ne preklapa s ostalima. Žeton ne treba nužno cijelom površinom biti unutar ploče. Ako Vlatka igra prva, tko ima pobjedničku strategiju?

2. Neka su n i k prirodni brojevi. Dva igrača igraju igru s n kamena na hrpi. Igrač na potezu može uzeti barem jedan, ali ne više od k kamena u svojem potezu. Za kakve (n, k) igrač koji igra drugi ima pobjedničku strategiju.

3. Zadan je pravilni mnogokut s 10001 vrhom. Dva igrača naizmjence crtaju dijagonale tog mnogokuta, ali ne smiju nacrtati dijagonalu koja bi sjekla neku već nacrtanih dijagonala (osim u vrhovima). Tko ima pobjedničku strategiju?

4. Imamo $n \times m$ ploču. U jednom potezu igrač može odabrati polje (k, l) i obojati sva polja (i, j) takva da je $k \geq i, l \geq j$. Igrač koji oboji polje (m, n) je izgubio. Tko ima pobjedničku strategiju ovisno o (m, n) ?

Umjereni zadaci

5. Mike i Sully igraju igru. U gornjem lijevom polju $n \times n$ ploče se nalazi bijela kraljica koju pomiče Mike u svojem potezu, a u gornjem desnom polju se nalazi crna kraljica koju pomiče Sully. Mike igra prvi. Na ostalim poljima ploče su sivi pijuni. U potezu je obavezno pomaknuti svoju figuru na zauzeto polje i uzeti figuru koja se tamo nalazi. Igrač kojem protivnik uzme figuru ili ostane bez poteza izgubio je. Tko ima pobjedničku strategiju ovisno o n ?

6. Na ploči je zapisano n jedinica. U jednom potezu igrač može obrisati dva relativno prosta broja i zapisati njihov zbroj. Tko ne može povući potez, izgubio je. Za koje n igrač koji igra prvi ima pobjedničku strategiju ?

7. Dva igrača naizmjence pišu racionalne brojeve u polja 6x6 ploče. Nije dozvoljeno napisati broj koji je već prije zapisan. Kad je svako polje ispunjeno, u svakom retku se polje s najvećim brojem oboji u crno. Prvi igrač pobjeđuje ako postoji put crnih polja od vrha do dna ploče, a drugi igrač inače. Tko ima pobjedničku strategiju ?

8.

Woody i Buzz igraju sljedeću igru. Na stolu je $N > 1$ karata. U prvom potezu Woody uzme barem jednu, ali ne sve karte sa stola. Nakon toga igraju naizmjence (prvo Buzz) i svaki igrač može uzeti barem jednu, ali ne više od $2m$ pri čemu je m broj karti koje je njegov suparnik uzeo u neposredno prethodnom potezu. Za koje N Buzz ima pobjedničku strategiju?

9. Igramo križić-kružić na 5x5 ploči, dokaži da nijedan igrač ne može sa sigurnošću složiti 5 znakova u nizu.

Teži zadaci

10.

Vlatka i Daniel igraju igru. Prvo Vlatka zapiše prirodan broj n na ploču, zatim naizmjence povlače sljedeće poteze. Daniel briše Vlatkin broj n i piše $m = n - a^2$ uz uvjet da nije negativan i da je a prirodan, a Vlatka briše Danielov broj m i piše $n = m^k$, k prirodan. Daniel pobjeđuje ako zapiše nulu. Može li Vlatka spriječiti Danielovu pobjedu?

11. Ruby i Sapphire igraju igru na 20 x 20 ploči, na početku je Ruby na potezu. Ruby u svojem potezu može postaviti crveni kamen, ali ne na polje koje je za $\sqrt{5}$ udaljeno od nekog drugog crvenog kamena. Sapphire u svojem potezu može postaviti plavi kamen na bilo koje polje. Odredi najveći N takav da Ruby može postaviti barem N crvenih kamena neovisno o Sapphirinim potezima.

12. U ovoj igri prvo igrač A postavlja skakača na bilo koje polje šahovske (8x8) ploče, zatim ga igrač B pomakne (kako se inače skakač pomiče u šahu). Nakon toga igrači naizmjence pomiču skakača, ali ne na polje na kojem je već bio. Tko ne može povući potez, gubi. Tko ima pobjedničku strategiju?

13. Jim i Ray igraju sljedeću igru. Zadana je ploča s $m + 1$ horizontalnih i m vertikalnih pravaca. Kamen se nalazi na nekom sjecištu najdonjeg horizontalnog i nekog vertikalnog pravca. Jim igra prvi. Igrači naizmjence pomiču kamen po jediničnoj dužini do susjednog sjecišta, ali ne dužinom kojom je kamen već prošao (bez obzira na smjer). Igrač koji ne može povući potez, izgubio je. Tko ima pobjedničku strategiju?

Više zadataka možete pronaći na `www.skoljka.org`.

Hintovi

1. Simetrija

2. mali primjeri; simetrija, indukcija

3. mali primjeri, indukcija

4. Pokušajte na manjim pravokutnim pločama npr. 2x3 ili 2x4 pobjediti kao prvi igrač ispitujući sve moguće poteze počevši s onima koji daju manju ploču tj. jednostavniji slučaj.

5. Mali primjeri

6. Mali primjeri. Koje brojeve drugi igrač želi na kraju igre? Ako si zapeo na parnom n dijelu, vrati se na neparan n i razmisli zašto prvi igrač ne može učiniti isto.

7. Mali primjeri, za svaki N napišite pobjeđuje li prvi igrač te, ako da, koliko karata treba vući da pobijedi. Pogodite rješenje i primjenite indukciju.

8. Koliko ima poteza do kraja igre, a koliko pravaca po kojima se može nanizati pet znakova? Možda ti 6. zadatak pomogne.

9. Koje n Vlatka nikako ne želi napisati ? Koje još nikako ne želi napisati ?

10. Pokušaj pogoditi N. Zatim dokaži da Ruby uvijek može barem N kamena postaviti. Nakon toga dokaži da Sapphire može uvijek postići da Ruby ne postavi više od N kamena. Ne zaboravi na male primjere.

11. Pokušaj isto s bilo kojom drugom šahovskom figurom, možda ti 6. i 9. zadatak pomognu.

12. Što će se dogoditi ako kamen počinje u kutu? Slično kao u 6. zadatku, igrač će imati strategiju koja toliko ograničava protivnika da ju vrijedi pokušati primijeniti na opći slučaj. Pitanje je kako bi to izveo... Također, mali primjeri.

Rješenja

1. Prvi igrač postavi u sredinu zatim centralnosimetrično u odnosu na protivnički potez.

2. Ako je n višekratnik od $k+1$ onda drugi igrač pobjeđuje. Strategija je uzeti $k+1-l$ kamena u svakom potezu gdje je l broj kamena koje je prvi igrač uzeo u prethodnom potezu.

3. Prvi igrač pobjeđuje za parne mnogokute tako da u prvom potezu povuče najdužu dijagonalu i dobije dva sukladna manja parna mnogokuta. Nakon toga prvi igrač ponavlja protivnički potez da drugom mnogokutu. Dakle paran mnogokut je pobjednička pozicija. Indukcijom možemo pokazati da je neparan mnogokut gubitnička pozicija (baza je 3). Uočimo da će nakon bilo kojeg poteza na neparnom mnogokutu ostati jedan neparan mnogokut (gubitnička pozicija) i jedan paran (pobjednička pozicija). To je pobjednička pozicija (razmislite zašto). Općenito ako imamo dvije međusobno neovisne igre (i možemo povući potez na jednoj ili drugoj igri), jednu u pobjedničkoj, drugu u gubitničkoj poziciji, cijela igra će biti u pobjedničkoj poziciji.

4. Pretpostavimo da su svi potezi prvog igrača osim možda (1,1) gubitnički (tj. da vode u pobjedničku poziciju), u tom slučaju prvi igrač pobjeđuje jer igra (1,1) i šalje drugog igrača u poziciju iz koje može samo u sve one za koje smo upravo pretpostavili da su gubitničke. Ako pak nisu svi, onda prvi igrač u prvom potezu igra taj koji jest pobjednički. U oba slučaja prvi igrač pobjeđuje.

5. Ako je n neparan, Sully pobjeđuje tako da svaki potez igra osnosimetrično (s obzirom na simetralu spojnice bijela kraljica - crna kraljica) zadnjem Mikeovom potezu. Ako je n paran, Mike pobjeđuje tako da se u prvom potezu pomakne za jedno polje prema crnoj kraljici, a dalje igra osnosimetrično Sullyjevim potezima.

6. Drž 2019, 4.A, 2. zadatak

7. Drugi igrač pobjeđuje. Ako i samo ako prvi igrač piše x u polje iz skupa $S = B1, B2, B3, C2, C3, C4, D3, D4, D5, E4, E5, E6$ (slovo predstavlja red), drugi igrač igra broj veći od x u isti redak, ali u neko polje izvan S. Ako i samo ako prvi piše x u polje iz retka B, C, D, ili E, ali ne iz S), drugi igrač piše broj manji od x u isti red u polje iz S. Tako će biti osigurano da nijedno polje iz S ne bude crno što drugom igraču osigurava pobjedu.

8. Indukcijom možemo pokazati da Buzz pobjeđuje ako je N Fibonaccijev broj. Nije teško pokazati za 2,3 ili 5 kao bazu. Korak provodimo tako da rastavimo fibonaccijev broj na dva prošla $a+b$. Ako Woody uzme više ili jednako $mina, b$, onda Buzz može pobjediti u jednom potezu, ako ne, onda će Buzz odigrati onako kako bi igrao da je $mina, b$ početna pozicija (moguće je prema pretp. ind.), nakon nekoliko poteza će ostati $maxa, b$ karata i Woody će biti na potezu (Buzz će pobjediti prema pretp. ind.). Za nefibonaccijeve brojeve N možemo pokazati tako da ih rastavimo na najveći fibonaccijev manji od N i ono što ostane (to će uvijek biti manje od trećine od N ili nefibonaccijev broj)

9. Obojimo ploču na ovaj način:
5 9 11 9 6 8 1 1 2 7 12 4 2 12 8 4 3 3 7 6 10 11 10 5
Onaj igrač koji želi sprječiti pobjedu drugog igrača igra na onaj broj na koji je protivnik igrao u prethodnom potezu (uoči da svaki redak, stupac i dijagonala sadrži dva ista broja).

10. Izvor.

11. IMO 2018, 4. zadatak

12. B može obojati ploču u 32 boje (2 polja svake boje) tako da skakač iz svakog polja može u drugo polje iste boje. Na taj način će B imati spreman odgovor na svaki A-ov potez. Traženo bojanje je moguće za 2 x 4 pravokutnik s 4 boje, konstrukcija se oslanja na ponavljanje tog uzorak.

13. Jim će prvi potez pomaknuti kamen gore do polja na rubu m x m kvadrata. Zatim povučemo zraku pod kutom 45^0 i odbijamo ga od ostalih stranica kvadrata te tako dobijemo pravokutnik upisan u mxm kvadrat (ako je kamen počeo u kutu, onda će to biti samo dijagonala kvadrata). Jim će u svakom potezu nadalje vratiti kamen na stranicu tog pravokutnika U jednom od vrha pravokutnika će Ray u konačnici ostati bez poteza jer im je stupanj (broj edževa) neparan.