Diofantske jednadžbe

Katja Varjačić

20. ožujka 2021.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Diofantske jednadžbe su jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima i cjelobrojnim rješenjima. Dijelimo ih na linearne i nelinearne. Mi ćemo se u ovom predavanju baviti više nelineranim diofantskim jednadžbama.
Neke od metoda za rješavanje nelinearnih diofantskih jednadžbi:

1. Metoda dijeljenja (kvocijenta)
2. Metoda faktorizacije
3. Metoda ostataka (kongruencija)
4. Metoda nejednakosti (ograničavanja)
5. Metoda zbroja kvadrata
6. Metoda smještanja među kvadrate i kubove

Metoda dijeljenja (kvocijenta)

Primjer 1. Riješite u skupu prirodnih brojeva sljedeću jednadžbu:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{13}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} 13x + 13y &= xy \\ y(x-13) &= 13x \\ y &= \frac{13x}{x-13} = 13 + \frac{13^2}{x-13} \end{aligned}$$

Kako y mora biti cijeli broj slijedi $(x-13)|13^2$, odnosno $x = 14, 26, 182$, $y = 182, 26, 14$. Rješenja su $(x, y) \in \{(14, 182), (26, 26), (182, 14)\}$.

Metoda faktorizacije

Primjer 2. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe:

$$xy - y + 2x = 4.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} y(x-1) + 2x - 2 &= 2 \\ y(x-1) + 2(x-1) &= 2 \\ (x-1)(y+2) &= 2 \end{aligned}$$

1. $\begin{array}{l} x-1=1 \\ \underline{y+2=2} \\ x=2 \\ y=0 \end{array}$
2. $\begin{array}{l} x-1=2 \\ \underline{y+2=1} \\ x=3 \\ y=-1 \end{array}$
3. $\begin{array}{l} x-1=-1 \\ \underline{y+2=-2} \\ x=0 \\ y=-4 \end{array}$
4. $\begin{array}{l} x-1=-2 \\ \underline{y+2=-1} \\ x=-1 \\ y=-3 \end{array}$

Rješenja su $(x, y) \in \{(2, 0), (3, -1), (0, -4), (-1, -3)\}$.

Metoda ostatka (kongruencija)

Ovom metodom pokazujemo da neka diofantska jednadžba nema rješenja tako da pokažemo da se ostatak koji pri dijeljenju s nekim brojem daje lijeva strana jednakosti razlikuje od ostatka koji daje desna strana.

Primjer 3. Odredite sva prirodna rješenja jednadžbe: $x^2 - 4y = 1995$.

Rješenje: Primjetimo kako x^2 mora biti neparan, pa onda i x, pa možemo pisati $x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$

$$(2k-1)^2 - 4y = 1995$$

$$4k^2 - 4k + 1 - 4y = 1995$$

$$4(k^2 - k - y) = 1994$$

Zaključujemo da jednadžba nema rješenja jer je desna strana djeljiva s 4, a lijeva lako provjerimo da nije.

Metoda nejednakosti (ograničavanja)

Primjer 4. U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu $a + b + c = abc$.

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti neka je $a \leq b \leq c$. Tada je $abc = a+b+c \leq 3c$, odnosno $ab \leq 3$, pa razlikujemo tri slučaja:

1. $a = 1$, $b = 1$;
2. $a = 1$, $b = 2$;
3. $a = 1$, $b = 3$;

Uvrštavajući te vrijednosti u početnu jednadžbu u 1.slučaju dobijemo kontradikciju $(2 = 0)$, 2.slučaj daje $c = 3$, a 3. daje $c = 2$ što je pak kontradikcija s $b \leq c$. Dakle, jedino rješenje je $(1, 2, 3)$.

Metoda zbroja kvadrata

Primjer 5. Odredite sve parove cijelih brojeva x i y za koje vrijedi: $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

Rješenje: Ideja je zapisati lijevu stranu kao zbroj nekih kvadrata, jer ćemo tako zapravo dobiti da je zbroj nekih prirodnih brojeva jednak nekom prirodnom broju, što onda nema puno mogućnosti.

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

1. $\begin{array}{l} x-1=1 \\ \underline{y=0} \\ x=2 \\ y=0 \end{array}$
2. $\begin{array}{l} x-1=-1 \\ \underline{y=0} \\ x=0 \\ y=0 \end{array}$
3. $\begin{array}{l} x-1=0 \\ \underline{y=1} \\ x=1 \\ y=1 \end{array}$
4. $\begin{array}{l} x-1=0 \\ \underline{y=-1} \\ x=1 \\ y=-1 \end{array}$

Rješenja su $(x, y) \in \{(2,0),(0,0),(1,1),(1,-1)\}$.

Metoda smještanja među kvadrate i kubove

Primjer 6. Odredite sva prirodna rješenja jednadžbe: $n^2 + 1 = m^2$.

Rješenje: Primijetimo da je $n^2 < n^2 + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, tj. $n^2 < m^2 < (n+1)^2$. Kako su n^2 i $(n+1)^2$ uzastopni kvadrati između njih se ne može nalaziti kvadrat, pa zaključujemo da nema rješenja.

Lakši zadaci

1. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2 + 11^2 = y^2$.

2. Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu $x^2 - xy - 2y^2 = 18$.

3. Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{7}{xy} = 1$.

4. Odredite rješenja jednadžbe u skupu prirodnih brojeva $x^2 + 10y = 1234567$.

5. Pokaži da $n^2 + n + 1$ nije potpun kvadrat ni za koji prirodan broj n.

Srednji zadaci

6. U cjelim brojevima riješi jednadžbu $(m^2 + n)(m + n^2) = (m + n)^3$.

7. Odredi prirodne brojeve a, b, c takve da je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

8. Dokaži da jednadžba $19x^3 - 84y^2 = 1984$ nema rješenja u cijelim brojevima.

9. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$10x^3 + 20y^3 + 8xyz = 1999z^3.$$

10. Riješite u prirodnim brojevima jednadžbu

$$3(xy + yz + zx) = 4xyz.$$

Teži zadaci

11. Nađi sve prirodne brojeve x i y takve da vrijedi $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$.

12. Nađite sve parove (x, y) cijelih brojeva takve da je $x^3 + y^3 = (x + y)^2$

13. Nađite sve proste brojeve p za koje je jednadžba $x^4 + 4 = py^4$ rješiva u cijelim brojevima.

Hintovi

1. Prebacite x^2 na drugu stranu i faktorizirajte.

2. Faktorizirajte lijevu stranu tako da rastavite srednji član.

3. Probajte izraziti y preko x.

4. Promatrajte djeljivost s 5.

5. Probajte smjestiti $n^2 + n + 1$ među 2 kvadrata prirodnog broja.

6. Izmnožite lijevu i desnu stranu, prebacite sve na jednu i faktorizirajte.

7. Bez smanjenja općenitosti pretpostavite da je $a \leq b \leq c$ pa promatrajte od čega a mora biti veći.

8. Promatrajte djeljivost s 2.

9. Promatrajte djeljivost s 2 i uočite da je jednadžba homogena, što nam to znači za rješenja?

10. Malo transformirajte jednadžbu te promatrajte slična ograničavanja kao i u 7. zadatku.

11. Probajte lijevu stranu smjestiti između 2 kuba.

12. Faktorizirajte, zatim probajte iskoristiti metodu zbroja kvadrata.

13. Faktorizirajte lijevu stranu (Sophie Germain identitet), zatim promatrajte mjeru tih faktora.

Rješenja

1. Ovaj zadatak riješit ćemo metodom faktorizacije.

$$\begin{aligned} x^2 + 11^2 &= y^2 \\ y^2 - x^2 &= 11^2 \\ (y-x)(y+x) &= 11^2 \end{aligned}$$

Sada promatramo sljedeće slučajeve.

1. $y - x = 11$
   $\underline{y + x = 11}$
   y=11, x=0
2. $y - x = 1$
   $\underline{y + x = 11^2}$
   y=61, x=60
3. $y - x = 11^2$
   $\underline{y + x = 1}$
   y=61, x=-60
4. $y - x = -11$
   $\underline{y + x = -11}$
   y=-11, x=0
5. $y - x = -1$
   $\underline{y + x = -11^2}$
   y=-61, x=-60
6. $y - x = -11^2$
   $\underline{y + x = -1}$
   y=-61, x=60

Slijedi da su nam sva rješenja slijedeći uređeni parovi: $(x, y) \in \{(0, 11), (0, -11), (60, 61), (-60, 61), (60, -61), (-60, -61)\}$

2. Srednji član na lijevoj strani jednadžbe možemo rastaviti kako bismo omogućili faktorizaciju:

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 2xy - 2y^2 &= 18 \\ x(x+y) - 2y(x+y) &= 18 \\ (x-2y)(x+y) &= 18 \end{aligned}$$

Uspjeli smo zapisati lijevu stranu kao umnožak 2 cjelobrojna izraza i taj umnožak iznosi 18. Sada bi trebalo provjeriti sve moguće slučajeve, a za to prvo trebamo pronaći sve djelitelje broja 18. To su:

$$-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9 \text{ i } 18$$

Međutim, dobili smo 12 slučajeva i bilo bi lijepo kada bismo uspjeli skratiti posao i eliminirati neke slučajeve bez da ih provjeravamo uvrštavanjem i izračunavanjem.
Možemo primijetiti sljedeće:

$$(x+y) - (x-2y) = 3y$$

Dakle, razlika ovih dvaju izraza je uvijek djeljiva s 3. To znači da svi slučajevi u kojima su $x + y$ i $x - 2y$ djelitelji od 18 čiji je umnožak 18, a razlika nije djeljiva s 3, ne vode do rješenja u cijelim brojevima. Drugim riječima, odbacujemo slučajeve u kojima je $x + y$ neki od sljedećih djelitelja broja 18:

$$-18, -9, -2, -1, 1, 2, 9, 18$$

Uvjerite se da zaista u tim slučajevima dobivamo kontradikciju!
Provjerimo sada preostale slučajeve:

1. $\underline{x + y = -6}$
   U tom je slučaju $x - 2y = -3$ pa je $3y = (x + y) - (x - 2y) = -6 - (-3) = -3$.
   Slijedi $y = -1$, a zatim i $x = -5$. $\Longrightarrow \boxed{(-5, -1)}$
2. $\underline{x + y = -3}$
   U tom je slučaju $x - 2y = -6$ pa je $3y = (x + y) - (x - 2y) = -3 - (-6) = 3$.
   Slijedi $y = 1$, a zatim i $x = -4$. $\Longrightarrow \boxed{(-4, 1)}$
3. $\underline{x + y = 3}$
   U tom je slučaju $x - 2y = 6$ pa je $3y = (x + y) - (x - 2y) = 3 - 6 = -3$.
   Slijedi $y = -1$, a zatim i $x = 4$. $\Longrightarrow \boxed{(4, -1)}$
4. $\underline{x + y = 6}$
   U tom je slučaju $x - 2y = 3$ pa je $3y = (x + y) - (x - 2y) = 6 - 3 = 3$.
   Slijedi $y = 1$, a zatim i $x = 5$. $\Longrightarrow \boxed{(5, 1)}$

3. Započnimo rješenje opservacijom $x, y \neq 0$, s obzirom da se nalaze u nazivnicima.
Nadalje, pomnožimo jednakost s xy kako bismo dobili ljepši oblik

$$\begin{aligned} y + 4x + 7 &= xy \\ xy - y &= 4x + 7 \\ y(x-1) &= 4x + 7 \\ y &= \frac{4x+7}{x-1} \\ y &= \frac{4(x-1)+4+7}{x-1} \\ y &= 4 + \frac{11}{x-1} \end{aligned}$$

Ovim zaključivanjem, uspjeli smo poprilično ograničiti mogućnost izbora za y. Naime, kako y mora biti cijeli broj, onda i $\frac{11}{x-1}$ mora biti cijeli broj, tj. $x-1$ mora biti djelitelj od 11. Razmotrimo te slučajeve:

1. $x - 1 = -11$
   $\underline{x = -10}$
   y=3
2. $x - 1 = -1$
   $\underline{x = 0}$
   Nema rješenja
3. $x - 1 = 1$
   $\underline{x = 2}$
   y=15
4. $x - 1 = 11$
   $\underline{x = 12}$
   y=5

4. Pogledom na ovaj zadatak i brojeve u njemu, relativno brzo se da naslutiti kako faktorizacija vjerojatno nije pravi put k rješenju. Naizgled kompliciran zadatak rješava se prilično jednostavno promatranjem ispravne stvari, u ovom slučaju ostataka koje izraz na lijevoj strani može davati pri dijeljenju s 5.
Naime, s obzirom da je $10y$ djeljivo s 5, ostatak pri dijeljenju s 5 na lijevoj strani zapravo je samo ostatak kojeg kvadrat cijelog broja x daje pri dijeljenju s 5. Promotrimo sljedeću tablicu ostataka pri dijeljenju s 5:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

Dakle, izraz na lijevoj strani može davati ostatke 0, 1 i 4 pri dijeljenju s 5. No, istovremeno broj na drugoj strani jednakosti daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5 iz čega jasno zaključujemo kako jednadžba **nema rješenja** u cijelim brojevima.

<u>Napomena:</u>
Promatranje djeljivosti izraza nekim brojevima često se jednostavnije zapisuje konguencijama. Ta je tema obrađena u 3. online predavanju.

5. Primijetimo da zbog $n \in \mathbb{N}$ tj. $n > 0$ vrijedi

$$n^2 + n + 1 > n^2 + 0 + 1 > n^2$$

S druge strane, sličnim zaključivanjem imamo i

$$n^2 + n + 1 < (n^2 + n + 1) + n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Međutim, n i $n+1$ su 2 uzastopna prirodna broja. S obzirom da je $n^2 + n + 1$ strogo između njihovih kvadrata, taj broj nikako ne može biti kvadrat nekog prirodnog broja.

6. Ovaj zadatak riješit ćemo metodom faktorizacije

$$\begin{aligned} &(m^2 + n)(m + n^2) = (m+n)^3 \\ &m^3 + m^2n^2 + nm + n^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 \\ &m^2n^2 + nm = 3m^2n + 3mn^2 \\ &mn(mn + 1 - 3m - 3n) = 0 \end{aligned}$$

Sada razlikujemo 3 slučaja:

1. $m = 0$, pa su rješenja svi uređeni parovi $(0, n), n \in \mathbb{Z}$
2. $n = 0$, pa su rješenja svi uređeni parovi $(m, 0), m \in \mathbb{Z}$
3. $mn + 1 - 3m - 3n = 0$
   $m(n-3) - 3(n-3) = 8$
   $(m-3)(n-3) = 8$
   Kako je jednadžba simetrična, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $m \geq n$, pa imamo slučajeve:
   $$m - 3 = 8, n - 3 = 1$$
   $$m - 3 = 4, n - 3 = 2$$
   $$m - 3 = -1, n - 3 = -8$$
   $$m - 3 = -2, n - 3 = -4$$
   Rješenja su sljedeća: $(x, y) \in \{(11, 4), (4, 11), (7, 5), (5, 7), (2, -5), (-5, 2), (1, -1), (-1, 1)\}$

7. Ovdje je potrebno uočiti da ne mogu sva tri broja a, b. c biti proizvoljno veliki. Dapače, $a > 3$, $b > 3$, $c > 3$ povlači $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. Zato je barem jedan od tih brojeva manji od 3. BSO možemo pretpostaviti $a \leq b \leq c$. Sada razlikujemo 3 slučaja:

1. $a = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Kontradikcija!
2. $a = 2 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$. Sada opet ograničavamo! Uočimo da barem jedan od brojeva b i c mora biti manji od 4. BSO $b \leq 4$. Slučaj $b = 2$ vodi na kontradikciju, a preostala dva daju rješenja $(2, 3, 6)$ i $(2, 4, 4)$.
3. $a = 3 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$. BSO $b \leq 3$, pa je $b = 3$ i imamo rješenje $(3, 3, 3)$.

Dakle rješenja su trojke $(3, 3, 3)$, $(2, 3, 6)$ i $(2, 4, 4)$, te njihove permutacije!

8. Ovaj zadatak riješit ćemo metodom ostataka. Prvo možemo primjetiti da $19x^3$ treba biti paran broj, pa možemo pisati $x = 2x_1$. U sljedećim koracima ćemo primjeniti slične opservacije.

$$\begin{aligned}
19(2x_1)^3 - 84y^2 &= 1984 \ \ \backslash : 4 \\
38x_1^3 - 21y^2 &= 496 \\
38x_1^3 - 21(2y_1)^2 &= 496 \ \ \backslash : 2 \\
19x_1^3 - 42y_1^2 &= 248 \\
19(2x_2)^3 - 42y_1^2 &= 248 \ \ \backslash : 2 \\
76x_2^3 - 21y_1^2 &= 248 \\
76x_2^3 - 21(2y_2)^2 &= 124 \ \ \backslash : 4 \\
19x_2^3 - 21y_2^2 &= 31
\end{aligned}$$

Nakon što smo uvelike smanjili koeficijente u jednadžbi, lakše je uočiti sljedeće korake. Promotrimo ostatke pri dijeljenju sa 7 koje može davati izraz na lijevoj strani posljednje jednakosti. Pritom primijetimo da je 21 djeljivo sa 7 pa je dovoljno pogledati koje ostatke pri dijeljenju sa 7 može davati izraz $19x^3$. U tablicu pišemo ostatke pri dijeljenju sa 7 (uvjerite se ako niste sigurni):

x_2	0	1	2	3	4	5	6
x_2^3	0	1	1	6	1	6	6
$19x_2^3$	0	5	5	2	5	2	2

Dakle, $19x_2^3 - 21y_2^2$ može davati ostatke 0,2 i 5 pri dijeljenju sa 7. No, na desnoj strani je broj 31 čiji ostatak pri dijeljenju sa 7 iznosi 3. Zaključujemo da jednadžba nema rješenja u cijelim brojevima x_2 i y_2.
Dakle, niti početna jednadžba **nema rješenja**.

Napomena:
Kod jednadžbi u cijelim brojevima u kojima se pojavljuju kubovi, ima smisla promatrati djeljivost sa 7 (ili sa 9). To je posljedica tzv. Eulerovog teorema ili pak Malog Fermatovog teorema. Detaljnije o toj temi možete naći u 16. online predavanju.

9. županijsko 1999., 2.raz: http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1999/1999-SS-zup-1234-zad+rj/1999-SS-zup-1234-zad%2Brj.pdf

10. Početna jednadžba je ekvivalentna s

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3}$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \leq y \leq z$, a iz toga dobijemo $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$. Dalje slijedi $\frac{3}{x} \geq \frac{4}{3}$, tj. $x \leq \frac{9}{4}$, pa je $x \in \{1, 2\}$. Analizirajući ta 2 slučaja dobimo rješenja $(1, 4, 12)$, $(1, 6, 6)$, $(2, 2, 3)$ i sve njihove permutacije.

11. Primijetimo da vrijedi sljedeća nejednakost

$$\begin{aligned} y^3 = x^3+8x^2-6x+8 &< (x^3+8x^2-6x+8)+(x^2+33x+19) \\ &= x^3+9x^2+27x+27 \\ &= (x+3)^3 \end{aligned}$$

jer je $x^2+33x+19>0$, s obzirom da je $x \in \mathbb{N}$.
Nadalje, vrijedi i sljedeća nejednakost

$$\begin{aligned} y^3 = x^3+8x^2-6x+8 &> (x^3+8x^2-6x+8)-(5x^2-9x+7) \\ &= x^3+3x^2+3x+1 \\ &= (x+1)^3 \end{aligned}$$

To vrijedi jer je $5x^2 > 5x$ te $4x < 7$ što za posljedicu ima $5x^2-9x+7>0$.
S obzirom da je y^3 kub prirodnog broja, a strogo je veći od kuba broja $x+1$¸te strogo manji od kuba broja $x+3$, jedina je mogućnost da je jednak kubu broja $x+2$. Dobivamo jednakost

$$\begin{aligned} y^3 &= (x+2)^3 \\ x^3+8x^2-6x+8 &= x^3+6x^2+12x+8 \\ 2x^2-18x &= 0 \\ x(x-9) &= 0 \end{aligned}$$

Sada je jasno da je jedino rješenje u prirodnim brojevima **x=9**, a odatle je **y=11**.

12. Za rješavanje ovog zadatka koristit ćemo metodu zbroja kvadrata. Prvo ćemo faktorizirati lijevu stranu pa promatrati slučajeve.

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^2 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2) &= (x+y)^2 \end{aligned}$$

1. x+y=0
   Rješenje su svi uređeni parovi $(x, -x)$ gdje je $x \in \mathbb{Z}$
2. $$(x^2-xy+y^2)=(x+y)$$

   Pomnožit ćemo jednadžbu s 2 i napisati u sljedećem obliku

   $$\begin{aligned} x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1 &= 2 \\ (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 &= 2 \end{aligned}$$

   Sada slijedi $|x-y| \leq 1$, $|x-1| \leq 1$ i $|y-1| \leq 1$. Nadalje promatrajući sve slučajeve dolazimo do svih preostalih rješenja, $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}$.

13. Introduction to diophantine equations, the factoring method, example 8