J4	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2021./22.

Teleskopiranje

Mislav Brnetić

30. listopada 2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

U ovom predavanju susrest ćemo se s različitim primjerima teleskopiranja kao ideje u rješavanju zadataka.
Ukoliko se do sada niste čuli s ovim pojmom, vjerojatno ste već ranije susreli i riješili zadatak koristeći ideju teleskopiranja.
Općenito, teleskopiranje je ideja, odnosno metoda, koju koristimo kako bismo pojednostavili kompliciraniji izraz drugačijim zapisivanjem dijelova tog izraza.
Zato nije potrebno nikakvo posebno predznanje, već samo prava ideja za drugačiji zapis dobivenog izraza koja će omogućiti "lijepo" pojednostavljivanje.

Primjer 1. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Rješenje. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Sada je naša suma jednaka

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}.$$

◁

Primjer 2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > 10$. Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\frac{2^2-1}{2^2+3\cdot 2+2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2+3\cdot 3+2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2+3n+2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2+3k+2}.$$

Rješenje. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{k^2-1}{k^2+3k+2}=\frac{(k-1)(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{k-1}{k+2}.$$

Sada je naš umnožak jednak

$$\frac{2-1}{2+2}\cdot\frac{3-1}{3+2}\cdot\frac{4-1}{4+2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+2}.$$

Primijetimo da će se pokratiti svi brojnici i nazivnici koji su veći od 3 i manji od n, tako da ostaje

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

Napomena. Uvjet $n > 10$ nam je trebao da ne bismo imali preklapanja brojeva koji se nisu pokratili. Na primjer za $n = 3$ ne postoje brojnici niti nazivnici koji su veći od 3 i manji od n, pa treba zasebno argumentirati takav slučaj. ◁

Lakši zadaci

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \ldots + \frac{n^2+1}{n^2-1}.$$

2. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

3. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

4. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 10$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{6}{1 \cdot (1+3)} + \frac{6}{2 \cdot (2+3)} + \ldots + \frac{6}{n \cdot (n+3)}.$$

Umjereni zadaci

5. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{2}{4 \cdot 1^2 - 1} + \frac{2}{4 \cdot 2^2 - 1} + \ldots + \frac{2}{4 \cdot n^2 - 1}.$$

6. Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. Dokaži da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

7. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $x \in \mathbb{R}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

8. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $x \in \mathbb{R}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n.$$

9. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!.$$

10. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$(1^2+1+1) \cdot 1! + (2^2+2+1) \cdot 2! + \ldots + (n^2+n+1) \cdot n!.$$

11. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}.$$

12. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je zadan rekurzivno:

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{ako } n = 0, \\ 2 + a_0 a_1 \ldots a_{n-1} & \text{ako } n \geq 1. \end{cases}$$

Odredi a_{2007}.

13. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{1^4+1^2+1} + \frac{2}{2^4+2^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^4+n^2+1}.$$

Teži zadaci

14. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$$

15. Neka su $(F_n)_{n\geq 0}$ Fibonaccijevi brojevi, odnosno

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_{k+1}=F_k+F_{k-1},$$

za svaki prirodan broj k. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{F_1F_3}+\frac{1}{F_2F_4}+\ldots+\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}<1.$$

16. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{6}{(3-2)(3^2-2^2)}+\frac{6^2}{(3^2-2^2)(3^3-2^3)}+\ldots+\frac{6^n}{(3^n-2^n)(3^{n+1}-2^{n+1})}.$$

17. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n>100$. Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\frac{(3^3+3\cdot 3)^2}{3^6-64}\cdot\frac{(4^3+3\cdot 4)}{4^6-64}\cdot\ldots\cdot\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}.$$

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Hintovi

1. Izvuci jedinicu iz svakog razlomka i napiši ostatak kao razliku dva razlomka.

2. Racionaliziraj sve razlomke.

3. Preoblikuj svaki član u umnošku tako da koristiš formulu za razliku kvadrata.

4. Zapiši svaki razlomak kao razliku dva razlomka.

5. Iskoristi formulu za razliku kvadrata i zapiši svaki razlomak kao razliku dva razlomka.

6. Rastavite izraz $x_0 - x_n$ te primijenite AG nejednakost.

7. Pomnoži i podijeli izraz s $1 - x$.

8. Pomnoži i podijeli izraz s $1 - x$.

9. Zapiši opći član sume kao razliku dva slična izraza.

10. Zapiši opći član sume kao razliku dva slična izraza.

11. Zapiši svaki razlomak kao zbroj (ili razliku) tri jednostavnija razlomka.

12. Izrazi a_n samo preko a_{n-1}, ispiši par članova niza i uoči pravilnost te ju dokaži matematičkom indukcijom. (ovaj zadatak nema puno veze s teleskopiranjem)

13. Faktoriziraj nazivnik i prikaži razlomak kao razliku dva razlomka.

14. Ogradi svaki razlomak odozgo s izrazom koji će se moći teleskopirati.

15. Izrazi svaki razlomak kao razliku dva slična razlomka.

16. Izrazi svaki razlomak kao razliku dva slična razlomka.

17. Faktoriziraj svaki član što je više moguće.

Rješenja

1. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{k^2+1}{k^2-1} = 1 + \frac{2}{(k-1)(k+1)} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}.$$

Danu sumu sada možemo zapisati kao

$$n - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n+1} = \boxed{n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.}$$

2. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \boxed{\sqrt{n+1}-1.}$$

3. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

što znači da dani umnožak možemo zapisati kao

$$\frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n \cdot (n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot n^2} =$$

$$\boxed{\frac{n+1}{2n}.}$$

4. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{6}{k(k+3)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+3},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \ldots + \frac{2}{n} - \frac{2}{4} - \frac{2}{5} - \ldots - \frac{2}{n+3} = 2 + 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} =$$

$$\boxed{\frac{11}{3} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}.}$$

5. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{2}{4k^2-1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \boxed{1 - \frac{1}{2n+1}.}$$

6. Nejednakost koju trebamo dokazati možemo zapisati kao

$$x_0 - x_1 + x_1 - \ldots - x_{n-1} + x_{n-1} - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant 2n.$$

Neka je $a_1 = x_0 - x_1$, $a_2 = x_1 - x_2$, ... $a_n = a_{n-1} - a_n$. Tada je lijeva strana nejednakosti jednaka

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \sum_{i=1}^{n}(a_i + \frac{1}{a_i}).$$

Zbog uređenosti $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ je svaki $a_i > 0$ pa je $a_i + \frac{1}{a_i} \geq 2$, odnosno $\sum_{i=1}^{n}(a_i + \frac{1}{a_i}) \geq 2n$, što je i trebalo pokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_i = 1$ za svaki $i = 1, 2, \ldots n$, odnosno $x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \ldots = x_{n-1} - x_n = 1$.

7. Za $x = 1$ vrijedi

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = 1 + 1 + \ldots + 1 = \boxed{n + 1.}$$

Za $x \neq 1$ možemo danu sumu pomnožiti i podijeliti s $1 - x$, što znači da je ona jednaka

$$\frac{(1-x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)}{1-x} = \frac{1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \ldots + x^n - x^{n+1}}{1-x} =$$

$$\boxed{\frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.}$$

8. Za $x = 1$ vrijedi

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + 1 = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}.}$$

Za $x \neq 1$ možemo danu sumu pomnožiti i podijeliti s $1 - x$, što znači da je ona jednaka

$$\frac{(1-x)(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n)}{1-x} = \frac{1 - x + 2x - 2x^2 + 3x^2 - 3x^3 + \ldots + (n+1)x^n - (n+1)x^{n+1}}{1-x} =$$

$$\frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}{1-x} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}.$$

Sada možemo iskoristiti rezultat iz prethodnog zadatka, pa je dana suma jednaka

$$\boxed{\frac{1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}.}$$

9. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$k \cdot k! = (k+1) \cdot k! - k! = (k+1)! - k!,$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$2! - 1! + 3! - 2! + \ldots + (n+1)! - n! = \boxed{(n+1)! - 1.}$$

10. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(k^2 + k + 1) \cdot k! = ((k+1)^2 - k) \cdot k! = (k+1)^2 \cdot k! - k \cdot k! = (k+1) \cdot (k+1)! - k \cdot k!,$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$2 \cdot 2! - 1 \cdot 1! + 3 \cdot 3! - 2 \cdot 2! + \ldots + (n+1) \cdot (n+1)! - n \cdot n! = \boxed{(n+1) \cdot (n+1)! - 1.}$$

11. Rastavimo izraz $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

Odredimo koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$. Svođenjem desne strane na zajednički nazivnik, dobivamo

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} = \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} =$$

$$\frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}.$$

Usporedimo li dobiveni brojnik s brojnikom izraza $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ i izjednačimo li koeficijente uz k^2, k te slobodne koeficijente, dobivamo sustav od tri linearne jednadžbe:

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 3a+2b+c=0, \\ 2a=1 \end{cases} \implies \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=-1, \\ c=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dakle vrijedi

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right).$$

Danu sumu sada možemo zapisati kao

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{2}-\frac{2}{3}-\ldots-\frac{2}{n+1}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\boxed{\frac{1}{4}+\frac{1}{2n+4}-\frac{1}{2n+2}.}$$

12. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ vrijedi

$$a_{k-1} = 2 + a_0 a_1 \ldots a_{k-2} \implies a_0 a_1 \ldots a_{k-2} = a_{k-1} - 2,$$

što znači da za svaki $k \geq 2$ vrijedi

$$a_k = 2 + a_0 a_1 \ldots a_{k-2} \cdot a_{k-1} = 2 + (a_{k-1} - 2)a_{k-1} = a_{k-1}^2 - 2a_{k-1} + 2.$$

Dokažimo sada principom matematičke indukcije da vrijedi za svaki $n \geq 1$ $a_n = 2^{2^n} + 1$.
Baza. $n = 1,\ a_1 = 2 + 3 = 2^{2^1} + 1$.
Pretpostavka. Za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n = 2^{2^n} + 1$.
Korak. Dokažimo da vrijedi $a_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1$. Korištenjem formule koju smo gore dokazali, imamo da vrijedi

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2 = (2^{2^n} + 1)^2 - 2(2^{2^n} + 1) + 2 = 2^{2^{n+1}} + 1,$$

čime je završen korak indukcije. Iz ovoga slijedi $\boxed{a_{2007} = 2^{2^{2007}} + 1.}$

13. Primijetimo da se nazivnici mogu faktorizirati na sljedeći način:

$$k^4 + k^2 + 1 = (k^2+1)^2 - k^2 = (k^2+k+1)(k^2-k+1).$$

Ono što je zanimljivo kod ove faktorizacije jest da je jedna zagrada zapravo jednaka drugoj zagradi uz translaciju varijable za jedan, odnosno vrijedi

$$k^2 - k + 1 = (k-1)^2 + (k-1) + 1.$$

Tu činjenicu ćemo iskoristiti da bi izveli teleskopiranje. Rastavljajući izraz

$$\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{k}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)}$$

na parcijalne razlomke, dobivamo da vrijedi

$$\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2(k^2-k+1)} - \frac{1}{2(k^2+k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{((k+1)-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right),$$

pa je dana suma jednaka

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{(n+1-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2+2n+2}.}$$

14. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

pa je dana suma manja od

$$1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

15. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} = \frac{1}{F_{k-1}(F_{k-1}+F_k)} = \frac{1}{F_k}\left(\frac{1}{F_{k-1}} - \frac{1}{F_{k-1}+F_k}\right) = \frac{1}{F_{k-1}F_k} - \frac{1}{F_kF_{k+1}},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_2F_3} + \frac{1}{F_2F_3} - \frac{1}{F_3F_4} + \ldots + \frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}} = \boxed{1 - \frac{1}{F_nF_{n+1}}.}$$

16. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})} = \frac{2^k}{3^k-2^k} - \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{2}{3-2} - \frac{2^2}{3^2-2^2} + \frac{2^2}{3^2-2^2} - \frac{2^3}{3^3-2^3} + \ldots + \frac{2^n}{3^n-2^n} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}} = \boxed{2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}.}$$

17. Rješenje