Kod | Grupa grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2021./22.

Cauchy-Schwarzova nejednakost

Patrik Papac

30.10.2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

Nejednakosti se često rješavaju uz manipulacije različitih suma, stoga ćemo kroz predavanje koristiti uobičajne oznake za ciklične ili simetrične sume kako bi si olakšali pisanje. Neki primjeri toga su

$$\sum_{cyc} ab = ab + bc + ca$$

$$\sum_{cyc} ab^2 = ab^2 + bc^2 + ca^2$$

$$\sum_{sym} ab = ab + ba + ac + ca + bc + cb = 2(ab + bc + ca)$$

$$\sum_{sym} ab^2 = ab^2 + ba^2 + bc^2 + cb^2 + ac^2 + ca^2$$

Ako je broj varijabli drugačiji onda se i sume mijenjaju, pa tako u slučaju varijabli $a, b, c,$ i d imamo

$$\sum_{cyc} ab = ab + bc + cd + da$$

$$\sum_{cyc} ab^2 = ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2$$

$$\sum_{sym} ab = 4(ab + bc + cd + da + ac + bd)$$

$$\sum_{sym} ab^2 = 4(ab^2 + ba^2 + bc^2 + cb^2 + ac^2 + ca^2 + cd^2 + dc^2 + da^2 + ad^2 + bd^2 + db^2)$$

Teorem 1

(Cauchy-Schwarzova nejednakost). Neka su $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ i $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ proizvoljni realni brojevi. Tada vrijedi

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbf{R}$ takav da je $b_i = \lambda a_i$, $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Dokaz. Zgodan poznati dokaz se svodi na to da promatramo realnu nenegativnu funkciju

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + ... + (a_nx - b_n)^2$$

Kako je funkcija nenegativna, to znači da joj je diskriminanta manja ili jednaka nuli, no diskriminanta nam dava točno izraz koji nas i zanima

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \leq 0$$

odakle dobivamo

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$$

Ukoliko vrijedi jednakost dobivamo da mora biti $b_i = x_0a_i$ za svaki i, gdje je x_0 nultočka funkcije f. Lako se provjeri i drugi smjer odnosno da se pri takvom uvjetu proporcionalnosti postiže jednakost. $\square$

Idući teorem je direktna posljedica Cauchy-Schwarz nejednakosti i često ćemo ga koristiti.

Teorem 2
(Cauchy-Schwarz nejednakost u Engel formi). Neka su $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ realni i $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

Primjer 1. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Rješenje. Ova dobro poznata jednakost se može vidjeti i direktno Cauchy-Schwarzove nejednakosti primjenjene na način
$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) \geq (ab + bc + ca)^2$$
odakle tražena nejednakost slijedi korijenovanjem. ◁

Primjer 2. (Nesbitt). Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Rješenje. Primjetimo da je ekvivalentna nejednakost
$$((a+b) + (b+c) + (c+a)) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9$$
a ova nejednakost direktno slijedi iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti.

◁

Rješenje. Nejednakost možemo riješiti i primjenom Engelove forme tako da proširimo razlomke,
$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{ab+ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = 1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}$$
gdje smo na kraju koristili već poznatu nejednakost $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. ◁

U ovom primjeru se vidi generalna strategija korištenja Cauchy-Schwarz nejednakosti. U prvom rješenju je to traženje prikladne ekvivalentne faktorizacije kako bi mogli primjeniti Cauchy-Schwarz nejednakost u originalnoj formi, dok je u drugom to „namještanje" kvadrata kako bi iskoristili Engel formu.

Primjer 3. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Dokažite da vrijedi
$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$$

Rješenje. Koristeći Cauchy-Schwarz nejednakost imamo
$$(x+y+z) \sum_{cyc} \frac{x-1}{x} \geq \left(\sum_{cyc} \sqrt{x-1} \right)^2$$
Iz uvjeta zadatka se lagano može dobiti da je
$$\sum_{cyc} \frac{x-1}{x} = 1$$
što uvrštavanjem u prethodnu nejednakost i korijenovanjem dava rezultat ◁

Primjer 4. Neka su $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ i $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$. Dokažite da vrijedi
$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + ... + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

Rješenje. Iskoristimo Engel formu direktno da dobijemo da je lijeva strana veća ili jednaka od
$$\frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_n + b_n} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$
što je i trebalo pokazati ◁

Zadaci

1. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

2. Neka je $P(x) = ax^2 + bx + c$ kvadratni polinom s nenegativnim realnim koeficijentima. Dokažite da ako vrijedi $P(1) \geq 1$, onda je

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$$

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a + b + c + d = 4$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq 2$$

4. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$$

6. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a$$

7. Dokažite da za sve pozitivne realne a, b, c vrijedi

$$\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+c)} + \sqrt{c(3c+a)} \leq 2(a+b+c)$$

8. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{2}{b(a+b)} + \frac{2}{c(c+b)} + \frac{2}{a(a+c)} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2}$$

9. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c za koje je $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ vrijedi

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}$$

10. Dokažite da za sve pozitivne reane brojeve a, b, c, x, y, z vrijedi

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

11. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{a^2+b^2+ab} + \frac{1}{b^2+c^2+bc} + \frac{1}{c^2+a^2+ca} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2}$$

12. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1$$

Dokažite da vrijedi

$$a + b + c \geq ab + bc + ca$$

13. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

14. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz \geq 1$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5} \geq 0$$

15. Neka su x, y, z realni pozitivni brojevi za koje je $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy} \leq x+y+z$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{x^2+y+z}+\frac{1}{y^2+z+x}+\frac{1}{z^2+x+y} \leq 1$$

16. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2$$

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Rješenja

1. IMO 1995.

2. Čehoslovačka 2004.

3. Irska 1999.

4. Bjelorusija 1999.

5. Državno natjecanje 2004.

6. Nejednakost možemo zapisati u obliku $a+b+c \leq \frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}$. Ovo se može pokazat Cauchy-Schwarz nejednakosti na način da obje strane pomnožimo s $(a+b+c)$ pa imamo

$$(c+a+b)\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\right) \geq (a+b+c)^2$$

što je i trebalo pokazati.

7. Primjenimo Cauchy-Schwarz nejednakost na kvadriranu lijevu stranu

$$(\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+c)}+\sqrt{c(3c+a)})^2 \leq (a+b+c)(3a+b+3b+c+3c+a) = 4(a+b+c)^2$$

što je i trebalo dokazati.

8. Balkan MO 2002.

9. Baltic Way 2008.

10. Bugarska 2000.

11. Nejednakost se može zapisati u obliku

$$(a+b+c)\sum_{cyc}\frac{c^2}{c(a^2+b^2+ab)}+\frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 6$$

Koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost na označenu sumu preostaje dokazati

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

što slijedi iz AG nejednakosti.

12. Rumunjska 2007.

13. USAJMO 2012.

14. IMO 2005.

15. Balkan MO SL 2016.

16. APMO 2004.