

Uvod

Poučci o sukladnosti trokuta. Dva trokuta su sukladna ako se poklapaju u

- svima trima stranicama (SSS poučak)
- dvjema stranicama i kutom između njih (SKS poučak)
- jednoj stranici i dvama kutevima uz nju (KSK poučak)
- dvjema stranicama i kutu nasuprot većoj (SSK poučak)

Sukladnost dva trokuta označavamo simbolom $\cong$ (npr. $\triangle A_1 B_1 C_1 \cong \triangle A_2 B_2 C_2$).

Poučci o sličnosti trokuta. Dva trokuta su slična ako

- im je jedan par stranica proporcionalan i kutevi što ih zatvaraju ti parovi međusobno jednaki (SKS poučak)
- su dva kuta jednog trokuta jednaka odgovarajućim kutevima drugog trokuta (KK poučak)
- su im odgovarajuće stranice proporcionalne (SSS poučak)
- su im jednaki omjeri dviju stranica i kut nasuprot veće od njih (SSK poučak)

Sličnost dva trokuta označavamo simbolom $\sim$ (npr. $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A_2 B_2 C_2$). Omjer odgovarajućih stranica dvaju sličnih trokuta jest *stalan* (za te trokute) i naziva se koeffcijentom sličnosti k .

Na natjecanjima, sukladnost i sličnost su često korisni alati u raznim geometrijskim situacijama te ih dokazujemo/pronalazimo koristeći neke već poznate teoreme, tvrdnje ili metode kojih ćemo se ukratko prisjetiti.

- vršni kutovi su jednaki, sukuti su suplementarni (tj. zbroj im je 180°), kutovi s paralelnim kracima (kutevi uz presječnicu) su jednaki, a kutovi s okomitim kracima su ili jednaki ili suplementarni
- središnji kut kružnice dvostruko je veći od pripadnog obodnog kuta, svi obodni kutovi nad istim lukom su jednaki, a obodni kutovi nad suprotnim lukovima su suplementarni
- vanjski kut trokuta jednak je zbroju preostala dva unutarnja kuta trokuta
- središte trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala svih kutova, a središte opisane je sjecište simetrala svih stranica trokuta
- spojnica polovišta dvije stranice trokuta naziva se srednjicom i ona je paralelna s trećom stranicom i jednaka polovici njene duljine
- obodni kut nad promjerom je pravi (Talesom teorem), vrijedi obrat (ako je $\overline{AB}$ proizvoljna dužina, tada je skup svih točaka T takvih da je $\angle ATB$ pravi kut kružnica s promjerom $\overline{AB}$)
- u pravokutnom trokutu je zbroj kvadrata duljina kateta jednak kvadratu duljine hipotenuze (Pitagorin poučak)
- svaka je točka na simetrali kuta manjega od 180° jednako udaljena od krakova tog kuta (pod udaljenosti točke i pravca podrazumijevamo udaljenost točke i nožišta okomice iz točke na taj pravac)
- svaka je točka simetrale dužine jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine
- zbroj unutarnjih kutova u općenitom mnogokutu s n stranica je $(n - 2) \cdot 180^\circ$ (ako je mnogokut pravilan, svi unutarnji kutovi su mu jednaki pa je svaki veličine $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$), zbroj vanjskih kutova svakog mnogokuta je 360°

Zadaci

1. Nad katetom $\overline{AC}$ i hipotenuzom $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su kvadrati $ACFG$ i $ADEB$. Dokaži da je $|CD| = |BG|$.
2. Neka je točka T unutar kružnice k i neka se tetive kružnice $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku u T . Dokaži da je $|AT| \cdot |TC| = |BT| \cdot |TD|$ (umnošci s lijeve i desne strane jednakosti se nazivaju *potencijom točke T* u odnosu na k).
3. Ako se u nekom četverokutu dijagonale raspolavljaju, taj je četverokut paralelogram. Dokažite ovu tvrdnju
4. Ako su p i q duljine odsječaka što ih visina duljine v čini na hipotenuzi pravokutnog trokuta, tada vrijedi

$$v = \sqrt{pq}$$

- .
5. Neka su A, B, C, D četiri različite točke na kružnici i neka se pravci BC i DA sijeku u točki E . Dokaži da su trokuti $\triangle ABE$ i $\triangle CDE$ slični.
 6. (Srednjica trokuta) Srednjica trokuta jest spojnica polovišta dvije stranice u trokutu. Srednjica trokuta paralelna je s trećom stranicom i jednaka polovini njene duljine. Dokažite ovu tvrdnju.
 7. (Svojstvo simetrale kuta u trokutu) Ako u trokutu $\triangle ABC$ simetrala kuta BAC siječe stranicu BC u točki K , tada vrijedi

$$|BK| : |KC| = |BA| : |AC|.$$

8. Kolike su stranice jednakokračnog trokuta kojemu je visina na osnovicu v , a polumjer upisane kružnice r ?
9. Neka su točke A i B sjecišta kružnica k_1 i k_2 . Neka su pravci a i b kroz točku A takvi da a siječe k_1 u točki C , a k_2 u točki D i b siječe k_1 u točki E , a k_2 i u točki F , pri čemu točke C, D, E, F pripadaju istoj poluravnini u odnosu na pravac AB i točka E se nalazi unutar kuta BAC . Dokaži da su trokuti $\triangle BEC$ i $\triangle BFD$ slični.
10. U trokutu ABC kut kod vrha A je dvostruko veći od kuta kod vrha B . Neka simetrala kuta kod vrha C siječe stranicu AB u točki D . Dokaži da vrijedi

$$|BC| = |AD| + |AC|$$

11. U svakom trokutu $\triangle ABC$ u kojem je $\beta = 2\alpha$ vrijedi $b^2 = a^2 + ca$. Dokažite!
12. Osnovica jednakokračnog trokuta ima duljinu a , a krak duljinu b . Simetrale kutova na osnovici sijeku krakove u točkama P i Q . Dokaži da vrijedi

$$|PQ| = \frac{ab}{a+b}.$$

13. Dane su dvije kružnice koje se ne sijeku, polumjera r_1 i r_2 . Udaljenost dirališta zajedničke unutarnje tangente na te kružnice iznosi 12, a udaljenost dirališta zajedničke vanjske tangente na te kružnice iznosi 16. Odredi umnožak $r_1 r_2$.
14. Upisana kružnica trokuta ABC dira stranice $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ u točkama D, E, F redom. Neka je točka K simetrična točki D s obzirom na središte upisane kružnice i neka se pravci DE i FK sijeku u S . Dokaži da je pravac AS paralelan pravcu BC .

Rješenja

1. Sukladnost i sličnost - Primjer 1.
2. Sukladnost i sličnost - Primjer 2.
3. Sukladnost i sličnost - Zadatak 1.
4. Sukladnost i sličnost - Zadatak 2.
5. Sukladnost i sličnost - Zadatak 3.
6. Sukladnost i sličnost - Zadatak 4.
7. Sukladnost i sličnost - Zadatak 5.
8. Sukladnost i sličnost - Zadatak 6.
9. Županijsko natjecanje 2014. OŠ 8.5.
10. Županijsko natjecanje 2016. SŠ 1.4.
11. Sukladnost i sličnost - Zadatak 7.
12. Sukladnost i sličnost - Zadatak 8.
13. Županijsko natjecanje 2018. SŠ 2.4.
14. MEMO 2010. T5