A1	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Split, sezona 2021./22.

Polinomi

Mateo Dujić

16.10.2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

Definicija 1

Polinom n-tog stupnja je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana sa

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

gdje su $n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.
Brojeve $a_0, ..., a_n$ zovemo **koeficijenti polinoma**, a_n **vodeći koeficijent**, a a_0 **slobodni koeficijent**.
Ako je $f \neq 0$, broj n zovemo **stupanj polinoma** i pišemo $degf = n$.
Ako je $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, onda polinom f zovemo **nul - polinom**, pišemo $f = 0$.
Ako je $a_n = 1$, kažemo da je polinom **normiran**. Ako postoji $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. takav da $f(x) = a$ za sve $x \in \mathbb{R}$, tada polinom f zovemo **konstantni polinom** i pišemo $f = a$.

Propozicija 2

Neka su f i g dva polinoma. Tada je:

1. $deg(fg) = deg(f) + deg(g)$
2. $deg(f + g) \leq \max\{deg(f), deg(g)\}$
3. $deg(f \circ g) = deg(f) \cdot deg(g)$

Definicija 3 (Jednakost polinoma)

Polinomi f i g su **jednaki** ako su jednaki kao funkcije, tj. $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Teorem 4 (Teorem o nul - polinomu)

Polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, jednak je nul - polinomu ako i samo ako $a_i = 0, i = 0, 1, ..., n$.

Teorem 5 (O jednakosti polinoma)

Polinomi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ i $g(x) = b_m x^m + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ su jednaki ako i samo ako $m = n$ i $a_i = b_i, i = 0, 1, ..., n$.

Teorem 6 (O dijeljenju s ostatkom)
Za polinome f i g postoje jedinstveni polinomi q i r tako da

$$f(x) = g(x)\ q(x) + r(x),\ \ deg(r) < deg(g)\ \ ili\ \ r(x) = 0.$$

q i r zovu se kvocijent i ostatak pri dijeljenju f s g. Ako je $r = 0$ tada kažemo da g dijeli f.

Korolar 7
Neka je f polinom stupnja n i $a \in \mathbb{R}$. Dijeljenje s $x - a$ daje

$$f(x) = (x - a)\ q(x) + r,\ \ r \in \mathbb{R},\ \ deg(q) = n - 1.$$

Definicija 8
Ako je za polinom f, za neki $a \in \mathbb{R}$ $f(a) = 0$, tada a zovemo **realni korijen** ili **realna nul - točka** polinoma f.

Napomena 9
Uočimo da vrijedi:

$$f(a) = 0 \iff f(x) = (x - a)\ q(x), za\ neki\ polinom\ q.$$

Ako za polinom f stupnja n, postoji n realnih nultočaka a_1, a_2, ... , a_n, tada je

$$f(x) = c\ (x - a_1)\ (x - a_2)\ ...\ (x - a_n), za\ neki\ c \in \mathbb{R}.$$

Definicija 10
Ako postoji $m \in \mathbb{N}$ i polinom q tako da je

$$f(x) = (x - a)^m\ q(x),\ q(a) \neq 0,$$

tada broj m zovemo **kratnost** nultočke a od f.

Propozicija 11
Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima i neka je $z \in \mathbb{Z}$, $a_n = 1$. Tada je

$$f(z) = 0 \iff z \mid a_0.$$

Dokaz. Uistinu, $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0 \iff a_0 = -z(a_n z^{n-1} + ... + a_1)$. Ako je $a_n = 1$, tada je svaki racionalni korijen zapravo cijeli broj. Zaista, Neka je $\frac{p}{q}$ korijen, $p, q \in \mathbb{Z}$,, $\gcd(p,\ q) = 1$. Tada je:

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_1\frac{p}{q} + a_0,$$

$$\frac{p^n}{q} = -a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - ... - a_1 pq^{n-2} - a_0 q^{n-1}.$$

Tada je desna strana prethodne jednakosti cijeli broj. Dakle, $q = 1$. $\square$

Propozicija 12

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Ako je $\alpha \in \mathbb{Q}$ korijen jednadžbe, dakle $\alpha = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, pri čemu su p i q relativno prosti, onda $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$.

Teorem 13 (Vieteove formule)

Za $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, neka su $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$ njegove nultočke. Tada je

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2...x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo za polinome stupnja 2 i 3. Za polinome višeg stupnja postupa se analogno, dokaz je samo tehnički zahtjevniji, ideja je ista.

- Ako polinom ax^2+bx+c ima korijene x_1, x_2, tada je $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$, pa je
$$b = -a(x_1 + x_2),\ c = ax_1x_2$$
- Neka su x_1, x_2, x_3 korijeni od $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tada je
$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3$$
i po teoremu o jednakosti polinoma dobivamo
$$b = -a(x_1 + x_2 + x_3),\ c = a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1),\ d = -ax_1x_2x_3$$

□

Lakši zadatci

1. Odredi sve polinome f takve da vrijedi $f(x - 1) = x^3 - 2x^2 + 2x$.

2. Odredimo ostatak pri dijeljenju $f(x) = x^{2017} + x + 1$ sa $g(x) = x^2 - 1$.

3. Podijeli $f(x) = 3x^5 - x^4 + 7x^2 + 2x - 6$ s $g(x) = x - 2$.

4. Faktoriziraj $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$.

5. Koja je suma recipročnih korijena jednadžbe

$$\frac{2003}{2004}x + 1 + \frac{1}{x}?$$

Umjereni zadatci

6. Neka su a i b korijeni jednadžbe $x^2 - mx + 2 = 0$. Pretpostavimo da su $(a + \frac{1}{b})$ i $b + \frac{1}{b}$ korijeni jednadžbe $x^2 - px + q = 0$. Odredi q.

7. Neka su x_1, x_2 i x_3 rješenja jednadžbe $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Odredi $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)$.

8. Dokaži da $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ nije racionalan broj.

9. Dokaži Bezoutov teorem za polinome (inače izrazito koristan na natjecanjima :)): Broj $\alpha \in \mathbb{C}$ je nultočka polinoma f ako i samo ako je f djeljiv s $(x-\alpha)$.

10. Neka su a, b, c, x, y realni brojevi takvi da $a^3 + ax + y = 0$, $b^3 + bx + y = 0$ i $c^3 + cx + y = 0$. Ako su a, b, c svi međusobno različiti, dokaži da im je suma jednaka nuli.

11. Neka su r_1, r_2 i r_3 korijeni od $x^3 - 2x^2 - 11x + a$ koji zadovoljavaju $r_1 + 2r_2 + 3r_3 = 0$. Odredi sve moguće vrijednosti od a.

Teži zadatci

12. Odredi sve polinome P takve da im je vodeći koeficijent 1, a svi ostali koeficijenti mogu biti 1 ili -1 uz uvjet da su svi korijeni polinoma realni brojevi.

13. Neka je polinom $f(x) = x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$. Umnožak dvaju od četiri korijena polinoma je -32. Odredi k.

14. Neka su r_1, r_2 i r_3 korijeni polinoma $5x^3 - 11x^2 + 7x + 3$. Odredi $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$.

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Hintovi

Lakši zadatci

1. Odredi stupanj polinoma (Iz propozicije 2, neka uzmi da je g jednak $x-1$, tada je stupanj od $f(g(x))$ po 3. svojstvu jednak stupnju te kompozicije što je 3, podijeljeno sa stupnjem od g, koji je jedan). Tada je $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, pa je $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d = f(x-1) = x^3-2x^2+2x$. Iskoristi Teorem 5. i riješi sustav. Dobije se: $a=b=c=d=1$.

2. Iz teorema o dijeljenju s ostatkom: $f(x) = g(x)q(x)+Ax+B$. Hint: ubacivaj nultočke od $g(x)$ da poništiš $q(x)$. Ubacivanjem $x=1$, dobivamo $3 = A+B$, a za $x=-1$, dobivamo $-1=-A+B$. Dakle, $A=2$, $B=1$ pa je ostatak jednak $2x+1$.

3. Nemoj na silu! Iskoristi Korolar 7. pa kako je ostatak konstantan realni broj, onda se on lagano dobije kao $f(2)$. Dakle, $f(x) = (x-2)q(x)+f(2)$ Uoči da se isti ostatak dobije Hornerovim algoritmom, a od prvog do predzadnjeg stupca su koeficijenti od $q(x)$. Za objašnjenje pogledaj u skripti iz Elementarne matematike 1, Algoritam 7.14.

4. Iskoristi Propoziciju 12. pa su svi cjelobrojni kandidati 1 i -1. Hornerovim algoritmom odredi im kratnosti. Rješenje je $(x-1)^2(x^3+1)$

5. Pomnoži obje strane s x, iskoristi Vieteove formule za jednadžbu 2. stupnja. $a+b = -\frac{2004}{2003}$ i $ab = \frac{2004}{2003}$. Sada izračunamo $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = -1$.

Umjereni zadatci

6. Težina zadatka je samo shvatit što se od nas traži. $q = (a+\frac{1}{b})(b+\frac{1}{a}) = ab+\frac{1}{ab}+2 = 2+2+\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

7. Izmnoži sve i ustanovi da za sve možeš iskoristiti Vieteove formule za polinom 3. stupnja.

8. Pokušaj broj prikazati kao korijen nekog polinoma. Iz propozicije 12. znaš da ako je korijen polinoma racionalan, brojnik mu mora dijeliti slobodni član, a nazivnik vodeći član. Ako krenemo s time da je $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, kvadriranjem pa sređivanjem pa kvadriranjem dobivamo da je α korijen od x^4-4x^2-1. Tada po Propoziciji 12 zaključujemo da α ako je racionalan može biti 1 ili -1, a to očito nisu korijeni našeg polinoma.

9. Ako je α nultočka onda je po teoremu o dijeljenju s ostatkom: $f(x) = (x-\alpha)q(x)+r$. Uvrštavanjem $x=\alpha$ imamo $r = f(\alpha) = 0$ po definiciji nultočke. Obratno, ako $(x-\alpha) \mid f$, onda je za neki polinom q: $f(x) = q(x)(x-\alpha$. Ubacivanjem $x=\alpha$ dobivamo $f(\alpha)=0$ pa je po definiciji α nultočka polinoma f.

10. Neka je $f(t) = t^3+xt+y$. Iz jednadžbi u zadatku zaključujemo da su a, b i c korijeni polinoma f. Kako su to sve različiti korijeni, a polinom je normiran, zaključujemo iz Napomene 9.da je $f(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$. Sada iz Vieteovih formula za jednadžbu 3. stupnja zaključujemo da je $a+b+c$ koeficijent uz t^2 u polinomu f, no kako toga koeficijenta nema, $a+b+c=0$.

11. Koristeći Vieteove formule dobiješ sustav 3 jednadžbi s 3 nepoznanice. Rješiš ga (pogledaj rješenje ako ne znaš) i dobiješ za r_3 mogućnosti $\frac{1}{3}$ ili -3 pa izračunaš r_1 i r_2. Kako je $a = -r_1r_2r_3$ iz ta dva slučaja dobiješ $\frac{104}{27}$ ili 12 kao jedine moguće vrijednosti za a.

Teži zadatci

12. Neka su r_1, r_2, ... , r_n ti realni korijeni od polinoma $f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$. Iz općenitih Vieteovih formula imamo

$$r_1+\ ...\ +r_n = -a_{n-1}\ \ i\ \ r_1r_2+r_1r_3+\ ...\ +r_{n-1}r_n = a_{n-2}$$

iz čega slijedi

$$r_1^2+\ ...\ +r_n^2 = (r_1+\ ...\ +r_n)^2-2(r_1r_2+r_1r_3+\ ...\ +r_{n-1}r_n) = a_{n-1}^2-2a_{n-2} \leq 3.$$

Uoči da je lijeva strana pozitivna pa je $a_{n-1}^2-2a_{n-2} \geq 0$. Kako je $a_{n-1} = \pm 1$ slijedi da je $a_{n-2} = -1$. Također, opet iz Vieteovih formula je $(r_1r_2...r_n)^2 = 1$. Iz A-G nejednakosti imamo $r_1^2+\ ...\ +r_n^2 \geq n$ pa je $n \leq 3$. Tada smo si dosta pojednostavili život i sva rješenja lako računamo: $x \pm 1$, $x^2 \pm x-1$ i $x^3-x \pm (x^2-1)$.

13. Neka su a, b, c, d ta četiri korijena. Po općenitim Vieteovim formulama:

$$abcd = -1984$$

. Neka su a i b takve da je njihov produkt -32 (možemo pretpostaviti bez smanjenja općenitosti). Tada je $cd = 62$ Još iz Vietea imamo:

$$a + b + c + d = 18$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = k$$

$$abc + abd + acd + bcd = -200$$

Iskoristimo poznati trik:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd = k - 62 + 32 = k - 30$$

Iz posljednje napisane Vieteove formule uz $ab = -32$ i $cd = 62$ dobivamo

$$-32c + 62b + 62a - 32d = -200$$

što je

$$31(a + b) - 16(c + d) = -100$$

Množenjem $a + b + c + d = 18$ s obje strane sa 16 imamo

$$16(a + b) + 16(c + d) = 288$$

Iz posljednje dvije jednadžbe imamo

$$47(a + b) = 188$$

pa dobivamo $a + b = 4$ i $c + d = 18 - 4 = 14$. Tada je

$$k - 30 = (a + b)(c + d) = 4 * 14 = 56$$

pa je

$$k = 86.$$

14. Kreni iz $(r_1 + r_2 + r_3)^3$ i dođi do poznate faktorizacije

$$r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 = 3r_1r_2r_3 + (r_1 + r_2 + r_3)[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)]$$

Još trebamo izraziti $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$. To je lagano:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1).$$

Koristimo Vieteove formule 3. stupnja. Obrati pažnju da su ovo posebno bitne faktorizacije koje se često javljaju na natjecanjima i da ih ne treba učiti napamet, ali korisno je znati da postoje jer ih nije preteško izvesti.

Rješenja

Lakši zadatci

1. Primjer 7.9. u skripti [1]

2. Primjer 7.13. u skripti [1]

3. Primjer 7.15. u skripti [1]

4. Iskoristi Propoziciju 12. pa su svi cjelobrojni kandidati 1 i -1. Hornerovim algoritmom odredi im kratnosti. Rješenje je $(x-1)^2(x^3+1)$

5. Klikni na "Solution" od TachyonPulse

Umjereni zadatci

6. Klikni na "Click to reveal hidden text" od korisnika $E^{pi*i} = -1$

7. Example 3 u pdf - u

8. Primjer 7.36. u skripti [1]

9. Teorem 7.22. u skripti [1]

10. Pogledaj rješenje od korisnika Altherman i korisnika Bugi - ovaj zadatak je s Juniorske Balkanske Matematičke Olimpijade

11. Example 4 u pdf - u

Teži zadatci

12. Example s [1968 Putnam Exam] u poglavlju "Generalization to Higher Degree Polynomials" ili ovdje

13. Pogledaj rješenje od korisnika gauss1181 - ovaj zadatak je s USA Mathematical Olympiad 1984

14. Prvi Example u poglavlju Vieta's Formula Problem Solving - Intermediate

Literatura

[1] Z. Bujanović B. Muha. *Elementarna matematika 1.* URL: https://drive.google.com/file/d/1W9yFwIknAiYDCyUkcjB5inL9U1
view?usp=sharing.