A2	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Split, sezona 2021./22.

Uvod u funkcijske jednadžbe

Patrik Papac

16.10.2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

Funkcijske jednadžbe su jednadžbe u kojima se umjesto traženja neke nepoznate varijable, kao rješenje traži funkcija. Neki primjeri funkcijskih jednadžbi su

a) $f(3x-1) = 2x^2 - 3x + 5$

b) $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$

c) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

d) $f(x+y) + g(x-y) = 2h(x) + 2h(y)$

e) $f(x,y) = x + yf(y,x)$

Uz samu jednadžbu, u zadatku je uvijek definirana domena i kodomena funkcije, pa bismo tako u ovom slučaju za prvi primjer imali npr. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dok se druga jednadžba najčešće rješava za $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
U trećem primjeru jednadžba ima dvije varijable, što znači da ona vrijedi za sve parove (x,y) zadane domene, osim u slučaju kad je suprotno eksplicitno navedeno.
U četvrtom primjeru u jednadžbi se traže tri nepoznate funkcije, također za sve parove (x,y), dok u petom funkcija ima više varijabli.
Općenito ne postoje konkretne metode kojima bi se pojedina funkcijska jednadžba riješila, već se koriste neke ideje i njihove kombinacije koje se moraju prepoznati. U ovom predavanju ćemo proći kroz neke takve standardne ideje. rješavanja.

1 Funkcijske jednadžbe s jednom varijablom

Primjer 1. Ako je $f(3x-1) = 2x^2 - 3x + 5$ za sve $x \in \mathbb{R}$, odredite $f(x)$.

Rješenje. Napravimo supstituciju $y = 3x - 1$, kako bi unutar zagrade u funkciji dobili jednostavnu varijablu. Odavde slijedi $f(y) = \dfrac{2y^2 - 5y + 38}{9}$. ◁

Primjer 2. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju $f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2$ za sve $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Rješenje. Uvrstimo $\frac{1}{x}$ umjesto x, odakle dobijemo novu jednadžbu $f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Time smo dobili sustav dvije funkcijske jednadžbe s dvije nepoznanice, $\frac{1}{x}$ i x, što znamo riješiti. Dobivamo rješenje $f(x) = -\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{3}{8x^2}$.
Zašto je u zadatku domena funkcije $\mathbb{R} - \{0\}$, a ne $\mathbb{R}$? ◁

2 Funkcijske jednadžbe s dvije varijable

Primjer 3. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Kod funkcijskih jednadžbi s dvije varijable je često dobro na početku uvrštavati određene vrijednosti kao što su 0, 1 i sl. kako bi vidjeli kako se funkcija ponaša i dali si naslutiti rješenje.
Uvrštavanjem $x = y = 1$ dobivamo $f(2) = 2f(1)$. Uvrštavanjem $x = 2$ i $y = 1$ dobivamo $f(3) = f(2) + f(1) = 2f(1) + f(1) = 3f(1)$. Ovdje već možemo uočiti neki uzorak kojeg prati funkcija.

Uvrstimo sad po uzoru na male vrijednosti $x = n - 1$ i $y = 1$, te dobivamo $f(n) = f(n-1) + f(1)$. Uvrštavajući $x = n - 2$ i $y = 1$ dobivamo $f(n-1) = f(n-2) + 1$. Vidimo da se iz $f(n)$ možemo „spustiti" sve do $f(1)$, odnosno

$$f(n) = f(n-1) + f(1) = f(n-2) + 2f(1) = ... = nf(1)$$

Pritom je $f(1)$ neka konstanta, označimo je s c. Uvrštavajući $f(n) = cn$ u početnu jednadžbu stvarno vidimo da je to rješenje zadatka. Zašto je bitno provjeriti rješenje? ◁

Primjer 4. Poopćite primjer 3. na cijele brojeve.

Rješenje. Uočimo da smo postupkom iz trećeg primjera pronašli rješenje u slučaju prirodnih brojeva. Da bi proširili to na cijele brojeve, potrebno je odrediti $f(0)$ i $f(-n)$ za $n < 0$.
Uvrstimo stoga u početnu jednažbu $y = 0$, odakle dobivamo $f(x) = f(x) + f(0)$. Slijedi $f(0) = 0$.
Uvrstimo sad u jednadžbu $x = -y = n > 0$ i dobivamo $f(0) = f(n) + f(-n)$. Koristeći da je $f(0) = 0$, dobivamo $f(-n) = -f(n)$, odnosno funkcija je neparna. Koristeći rješenje primjera 3. dobivamo $f(-n) = -cn$. Sveukupno rješenje se dakle može zapisati kao $f(x) = cx$, i lako se provjeri da zaista zadovoljava početnu jednadžbu. ◁

Primjer 5. Odredite sve funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Prvo odredimo $f(0)$ pogodnim uvrštavanjem. Zatim pokušamo namjestiti da nam se neke zagrade skrate. Ideja je „lijepo" uvrštavanje varijabli, slično kao u prošlom primjeru. ◁

Primjer 6. Odredite sve funkcije $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da vrijedi $f(1) = 2$ i $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ za sve $x, y \in \mathbb{Q}$.

Rješenje. Uvrstimo $y = 1$ odakle dobivamo $f(x+1) = f(x) + 1$. Po uzoru na treći primjer možemo odrediti $f(m)$ za cijele brojeve m. Uvrštavanjem $y = n > 0$ dobivamo $f(nx) = nf(x) - n + 1$.
Sada želimo da u jednoj zagradi dobijemo nešto što znamo (cijeli broj), dok u drugoj želimo općeniti izraz za racionalni broj. Uvrštavanjem $y = \frac{m}{n}$ dobivamo $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} + 1$ i uvrštavanjem se lako vidi da to stvarno i jest rješenje. ◁

Primjer 7. Odredite sve funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Ovo je primjer u kojem uvrštavanje posebnih vrijednosti rješava zadatak. Uvrstimo $x = y = 1$, odakle slijedi da je $f(1) = 0$ ili $f(1) = 1$.
U prvom slučaju uvrstimo u početnu jednadžbu $y = 1$, te dobivamo $xf(x) = f(x)$, odakle slijedi $f(x) = 0$.
U drugom slučaju imamo istim uvrštavanjem $xf(x) = x^2$, odakle dobivamo $f(x) = x$. Provjerom slijedi da su ovo doista rješenja jednadžbe. ◁

Primjer 8. Pokaži da je funkcija koja zadovoljava $f(f(x)) = x$ bijekcija.

Rješenje. Funkcija je injekcija ako iz $f(a) = f(b)$ slijedi $a = b$. Funkcija je surjekcija ako $f(x)$ postiže sve vrijednosti iz zadane kodomene. Funkcija koja je injekcija i surjekcija se zove bijekcija. ◁

Primjer 9. Odredite sve funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Prvo pokažemo da je f bijekcija. Zatim pokažemo da je $f(f(x)) = x$ (ovo može i prije). Zatim iskoristimo surjektivnost uvrštavajući $x = f(t)$ za proizvoljni t. Dobivamo $f(t^2 + f(y)) = f(f(t)^2 + f(y))$ odakle iz injektivnosti slijedi $f(t) = \pm t$. Je li ovo kraj? ◁

Zadatci

1. Odredite sve funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x) + af(1-x) = x^3$ za sve realne x, gdje je a neki realni parametar.

2. Odredite sve funkcije $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1+9x^2}{x^2} - \frac{6}{x}$, za sve $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3. Odredite sve funkcije $f: \mathbb{R} - \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + \frac{1}{x(1-x)}$ za sve $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

4. Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava jednadžbu $x + f(x) = f(f(x))$ za sve realne x. Odredite sva rješenja jednadžbe $f(f(x)) = 0$.

5. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x) - f(y) = x - y$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

6. Poopćite primjer 4. na racionalne brojeve.

7. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

8. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R}^2 - \{(1,1)\} \to \mathbb{R}^2$ takve da vrijedi $f(x,y) = x + yf(y,x)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da vrijedi $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ za sve $x, y \in \mathbb{Q}$.

10. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

11. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x^2 + f(y)) = y - x^2$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

12. Odredite sve injektivne funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi $f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$, $f(1) = 2$, i $f(2) = 4$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

Više zadataka možete pronaći na `www.skoljka.org`.

Rješenja

1. $f(x) = \dfrac{x^3 - a(1-x)^3}{1-a^2}$

2. $f(x) = (x+2)^2$

3. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x(1-x)} + \dfrac{1}{1-x} + 1 - x\right)$

4. $x = 0$

5. $f(x) = x + c$

6. $f(x) = cx$

7. $f(x) = 0$

8. $f(x,y) = \dfrac{x+y^2}{1-xy}$

9. $f(x) = kx + c$

10. $f(x) = x^2 + c$

11. $f(x) = -x + c$

12. $f(1) = 2$, $f(n) = n + 2$ za $n \geq 2$