S7	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2021./22.

Pellova jednadžba

Daniel Širola

20. studeni 2021.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

1 Osnovno o Pellovoj jednadžbi

Krenimo s definicijom Pellove jednadžbe:

Definicija 1.1. *Neka je $d \in \mathbb{N}$ koji nije potpun kvadrat.* ***Pellova jednadžba*** *je diofantska jednadžba oblika*

$$x^2 - dy^2 = 1$$

Jednadžba je tako pogrešno nazvana jer je Euler greškom rješenje jednadžbe pripisao engleskom matematičaru iz 17. stoljeća, Pellu. Originalno rješenje pripada Brounckeru. Rješavanje pellove jednadžbe je ključan korak u rješenju opće diofantske jednadžbe u dvije varijable. Pellova jednadžba povjesno datira još u vrijeme stare Grčke. Stari Grci su jednadžbu proučavali u povezanosti s $\sqrt{2}$. Naime, osnovni oblik Pellove jednadžbe je

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Ukoliko su x i y veliki, onda je $\frac{x}{y} \approx \sqrt{2}$. Još su Pitagorejci pronašli način računanja rješenja Pellove jednadžbe pomoću formula

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n$$

$$y_{n+1} = x_n + y_n$$

Zadatak 1. Dokažite da ukoliko je (x_n, y_n) rješenje Pellove jednadžbe, onda je to i (x_{n+2}, y_{n+2}) definirano preko prethodnih jednadžbi.

Pošto smo dokazali tu tvrdnju, možemo počevši s $(1, 0)$ generirati beskonačno rješenja te Pellove jednadžbe. Također, jedna od najpoznatijih diofantskih jednadžbi, odnosno Pellovih jednadžbi, je ona koja se dobiva kao rješenje glasovitog Arhimedovog problema *Stoke boga sunca.* Podužu formulaciju zagonetke možete pronaći na internetu. Što je bitno jest da postavljanjem problema dolazimo do Pellove jednadžbe

$$x^2 - 4729494y^2 = 1$$

Problem je u tome što ta jednadžba nema toliko jednostavne rekurzivne korake. Najmanje rješenje, osim naravno trivijalnog, našli su Krummbiegel i Amthor 1880. godine, i to rješenje ima 206545 znamenki.

2 Postojanje rješenja Pellove jednadžbe

Na početku ovog odjeljka navodimo dva rezultata koje nećemo dokazivati jer izlaze iz okvira teme predavanja.

Teorem 2.1. *(Dirichlet) Neka su $\alpha, Q \in \mathbb{R}$ i $Q > 1$. Tada postoje cijeli brojevi p, q takvi da je $1 \leq q \leq Q$ i $|\alpha q - p| \leq \frac{1}{Q}$.*

Nama će biti potrebna i sljedeća posljedica tog teorema:

Lema 2.1. *Ako je α iracionalan broj, onda postoji beskonačno mnogo parova p, q takvih da je* $\gcd(p,q) = 1$ *tako da vrijedi*
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

Zadatak 2. Korištenjem Dirichletovog teorema dokažite ovu posljedicu istog.

Sada ćemo dokazati još jednu lemu koja će nam dobro doći u daljnjem izlaganju.

Lema 2.2. *Neka je d prirodni broj koji nije potpun kvadrat. Tada postoji cijeli broj k takav da $0 < |k| < 1 + 2\sqrt{d}$ i sa svojstvom da jednadžba*
$$x^2 - dy^2 = k$$
ima beskonačno rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Dokaz. Prema Lemi 2.1 postoji beskonačno mnogo parova prirodnih brojeva (x, y) sa svojstvom
$$\left|\sqrt{d} - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2}$$
To je ekvivalentno
$$|x - y\sqrt{d}| < \frac{1}{y}$$
Za svaki takav par vrijedi
$$|x + y\sqrt{d}| = |x - y\sqrt{d} + 2y\sqrt{d}| < \frac{1}{y} + 2y\sqrt{d} \leq (1 + 2\sqrt{d})y$$
pa je
$$|x^2 - dy^2| = |x - y\sqrt{d}| \cdot |x + y\sqrt{d}| < 1 + 2\sqrt{d}$$
Budući da parova s tim svojstvom ima beskonačno mnogo, no cijelih brojeva čija je apsolutna vrijednost manja od $1 + 2\sqrt{d}$ ima samo konačno, onda mora postojati neki k takav da $|k| < 1 + 2\sqrt{d}$ i da jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja. Pošto d nije potpun kvadrat lako slijedi da $k \neq 0$.

□

Dokaz prethodne leme uvršten je u ovaj materijal jer ima nekoliko zanimljivih detalja i trikova, a ne zahtijeva neke napredne tehnike izuzev ranije spomenute Leme 2.1. Sada možemo iznijeti temeljni teorem koji govori o rješivosti Pellovih jednadžbi.

Teorem 2.2. *Pellova jednadžba $x^2 - dy^2 = 1$ ima barem jedno rješenje u prirodnim brojevima x i y.*

Dokaz. Dokaz počinjemo referirajući se na Lemu 2.2. Naime, znamo da jednadžba $x^2 - dy^2 = k$ ima beskonačno rješenja. Sada uzmimo ta rješenja u obliku uređenih parova koji zadovoljavaju jednadžbu.

Zadatak 3. Dokažite da postoje rješenja (x_1, y_1) i(x_2, y_2) takva da vrijedi
$$x_1 \equiv x_2 \pmod{k}$$
$$y_1 \equiv y_2 \pmod{k}$$

Sada za takva dva rješenja označimo

$$x = \frac{x_1x_2 - dy_1y_2}{k}, y = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{k}$$

Zadatak 4. Dokažite da je

$$x = \frac{x_1x_2 - dy_1y_2}{k}, y = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{k}$$

rješenje Pellove jednadžbe, odnosno da vrijedi $x, y \in \mathbb{Z}$ i $x^2 - dy^2 = 1$.

Rješenjem tog zadatka je i teorem dokazan. $\square$

Najmanje rješenje u skupu prirodnih brojeva kažemo da je *fundamentalno* rješenje. Označavamo ga s (x_1, y_1). Prirodni nastavak prethodnog teorema je sljedeći teorem koji govori o postojanju beskonačno rješenja Pellove jednadžbe.

Teorem 2.3. *Pellova jednadžba $x^2 - dy^2 = 1$ ima beskonačno mnogo rješenja. Ako je (x_1, y_1) fundametnalno rješenje, onda su sva rješenja u prirodnim brojevima ove jednadžbe dana formulom*

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Prije dokaza teorema navedimo jedan zadatak bitan za njegovo rješavanje:

Zadatak 5. Ukoliko su $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ i $d \in \mathbb{N}$ takav da $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$, onda vrijedi

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = x_2 + y_2\sqrt{d} \implies x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

Dokaz. Zbog prethodno navedenog zadatka vrijedi da

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

implicira

$$x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^n$$

Sada množenjem tih tvrdnji dobivamo

$$x_n^2 - y_n^2 d = (x_1^2 - y_1^2 d)^n = 1^n = 1$$

pa vidimo da stvarno tako definirani (x_n, y_n) rješenja Pellove jednadžbe. Pretpostavimo da je (s, t) rješenje koje nije tog oblika. Pošto vrijedi $x_1 + y_1\sqrt{d} > 1$ i $s + t\sqrt{d} > 1$, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^m < s + t\sqrt{d} < (x_1 + y_1)^{m+1}$$

Pomnožimo jednakost s $(x_1 + y_1\sqrt{d})^{-m} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^m$ i dobivamo

$$1 < (s + t\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})^m < x_1 + y_1\sqrt{d}$$

Definirajmo sada $a, b \in \mathbb{Z}$ tako da je $a + b\sqrt{d} = (s + t\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})^m$. Imamo sada

$$a^2 - b^2\sqrt{d} = (s^2 - t^2\sqrt{d})(x_1^2 - y_1^2\sqrt{d})^m = 1$$

Iz $a + b\sqrt{d} > 1$ slijedi $0 < a - b\sqrt{d} < 1$ pa je $a > 0$ i $b > 0$. Stoga je (a, b) rješenje u prirodnim brojevima jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$, ali i vrijedi $a + b\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$ što je kontradikcija, pa je teorem dokazan.

$\square$

3 Verižni razlomci

U ovom odjeljku uvodimo metodu koja vrlo dobro može poslužiti u rješavanju Pellove jednadžbe. Prvo ćemo uvesti i definirati verižne razlomke. Prvo ponudimo algoritam za "proizvodnju" verižnih razlomaka.

Algorithm 1: Stvaranje verižnog razlomka

$\alpha =$ zadani broj
$n_1 = \lfloor \alpha \rfloor$
ostatak $= \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$
k=2
while *ostatak* $\neq 0$ **do**
  $\alpha_k = \frac{1}{\text{ostatak}}$
  $n_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$
  ostatak $= \alpha_k - \lfloor \alpha_k \rfloor$
  $k = k + 1$
end
return (n_k)

Tehnički govoreći ovo nije algoritam u striktnom smislu iz razloga što je ova petlja u mnogo slučajeva beskonačna. Također taj algoritam vraća beskonačni niz. No, taj algoritam daje način za rastavljanje broja u verižni razlomak.

Definicija 3.1. ***Verižni razlomak*** *je (ne potpuno formalno govoreći) beskonačni razlomak*

$$\alpha = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \cfrac{1}{n_5 + \ddots}}}}$$

gdje je (n_k) niz dobiven prethodno navedenim algoritmom.

Suština ranije navedenog postupka je sljedeća: uzmimo zadani broj $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom uzmimo njegov cijeli dio n_1, te je ostatak < 1. Potom invertiramo ostatak, te ponovimo postupak na njemu i tako dalje.

Zadatak 6. Dokažite da se taj postupak zaustavlja ako i samo ako je $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. U tom slučaju je gore napisani postupak uistinu algoritam. S kojim drugim algoritmom je tada on usko povezan?

Zadatak 7. Primijenite dani algoritam na $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$.

Općenito, za verižni razlomak korijena prirodnog broja vrijedi sljedeći teorem. Njegov dokaz je netrivijalan i dug pa ga preskačemo iz tehničkih razloga.

Teorem 3.1. *Ako prirodni broj d nije potpun kvadrat, tada razvoj u verižni razlomak od $\sqrt{d}$ ima oblik*

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{r-1}, 2a_0}]$$

Napomena: Notacija gore upotrijebljena znači da je $\sqrt{d}$ napisan u obliku verižnog razlomka takvog da je niz (n_k) jednak

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{r-1}, 2a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{r-1}, 2a_0, \ldots$$

Nadcrtani dio se ponavlja beskonačno puta.
Dakle, dovoljno je raspisivati verižni razlomak dok ne naletimo na $n_k = 2n_1$. Tada smo gotovi.

Slijede dva zadatka za prakticiranje prethodno navedenog teorema.

Zadatak 8. Razvijte broj $\sqrt{15}$ u verižni razlomak. Zapišite ga skraćenom notacijom.

Zadatak 9. Neka je $d \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{d^2+1} = [d, \overline{2d}]$$

Sad kada smo objasnili osnovno o verižnim razlomcima, vrijeme je da objasnimo povezanost Pellove jednadžbe i verižnih razlomaka. Prvo nam treba jedna definicija koja će se pokazati korisnom.

Definicija 3.2. *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i neka je*

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots a_n, \dots]$$

*Tada se $[a_0, a_1, a_2, \dots a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ naziva n-ta **konvergenta** verižnog razlomka od α.*

Ako nije očito iz definicije, želim još jednom naglasiti da se radi o racionalnom broju i njega se zapisuje kao $\frac{p_n}{q_n}$ gdje je $\gcd(p_n, q_n) = 1$. Dokaz sljedećeg teroema također je izostavljen jer traži nešto više *mašinerije* iz verižnih razlomaka, pa bi materijal zauzeo preveliki opseg.

Teorem 3.2. *Neka su $\frac{p_n}{q_n}$ konvergente, a l duljina perioda u razvoju u verižni razlomak od $\sqrt{d}$. Ako je l paran, onda jednadžba $x^2 - dy^2 = -1$ nema rješenja, a sva rješenja od $x^2 - dy^2 = 1$ su dana s $(x, y) = (p_{nl-1}, q_{nl-1})$. Posebno, fundamentalno rješenje je (p_{l-1}, q_{l-1}). Ako je l neparan, onda su sva rješenja jednadžbe $x^2 - dy^2 = -1$ dana s $(x, y) = (p_{(2n-1)(l-1)}, q_{(2n-1)(l-1)})$. Sva rješenja jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ dana su s $(x, y) = (p_{2nl-1}, q_{2nl-1})$. Posebno, fundamentalno rješenje je (p_{2l-1}, q_{2l-1})*

Prethodni teorem nam daje sada potpuni algoritam rješavanja Pellove jednadžbe. Ilustriramo postupak u sljedećem primjeru:

Primjer 3.1. *Nađite fundamentalno rješenje jednadžbe $x^2 - 113y^2 = 1$.*

Rješenje:

Prvo razvijmo $\sqrt{113}$ u verižni razlomak. Koristimo se ranije opisanim algoritmom.

$$a_0 = 10$$

Sada ostaje $r_0 = \sqrt{113} - 10$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{113} - 10} = \frac{\sqrt{113} + 10}{13}$$

$$a_1 = 1$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{113} - 3}{13}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{13}{\sqrt{113} - 3} = \frac{13(\sqrt{113} + 3)}{104} = \frac{\sqrt{113} + 3}{8}$$

$$a_2 = 1$$

Sada analogno nastavljamo rješenje, možete za vježbu raspisati do kraja. Konačno, dobivamo da je

$$\sqrt{113} = [10, \overline{1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 20}]$$

Da bismo izračunali fundamentalno rješenje dane Pellove jednadžbe, promotrimo da je $l = 9$. Sada dobivamo neparan slučaj prethodnog teorema. To znači da je rješenje jednadžbe $x^2 - dy^2 = -1$ jednako (p_{l-1}, q_{l-1}), odnosno (p_8, q_8). Dobivamo nekim fizičkim poslom da je $(p_8, q_8) = (776, 73)$. Sada imamo da je konačno rješenje

$$(p_8 + q_8\sqrt{113})^2 = 1204353 + 113296\sqrt{113}$$

odnosno $(1204353, 113296)$.

$\Diamond$

4 Pelovske jednadžbe

Teoretski dio predavanja zaključujemo sa sekcijom posvećenoj takozvanim pelovskim jednadžbama. To su jednadžbe općenitijeg tipa od same Pellove jednadžbe.

Definicija 4.1. *Neka je $d \in \mathbb{N}$ koji nije potpun kvadrat, te neka je $N \in \mathbb{Z}$ s tim da $N \neq 0$. Jednadžba oblika*

$$x^2 - dy^2 = N$$

*naziva se **pelovska jednadžba**.*

Jasno je da ovakva jednadžba ne mora imati cjelobrojnih rješenja. No ukoliko ima jedno ima beskonačno. To je stoga što, ako je $x + y\sqrt{d}$ rješenje pripadne Pellove jednadžbe, a $a + b\sqrt{d}$ pelovske, onda je $(x + y\sqrt{d})(a + b\sqrt{d})$ rješenje te iste pelovske jednadžbe. Sada navedimo primjer pelovske jednadžbe bez cjelobrojnih rješenja.

Primjer 4.1. *Dokažite da jednadžba*

$$x^2 - 12y^2 = 2$$

nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje:

Pretpostavimo da postoje rješenja dane jednadžbe i da su to $a, b \in \mathbb{Z}$. Tada vrijedi

$$a^2 - 12y^2 = 2$$

Sada lako vidimo $2|a$. Tada možemo napisati $a = 2a_1$. To znači da je

$$(2a_1)^2 - 12y^2 = 2 \iff 4a_1^2 - 12y^2 = 2$$

Sada lako vidimo da je lijeva strana jednakosti djeljiva s 4, no to nije slučaj s desnom stranom jednakosti. Tako ulazimo u kontradikciju, pa rješenje ne postoji.

$\Diamond$

Problem s pelovskim jednadžbama je što rješenja može biti više vrsta i teže ih je opisati od rješenja Pellove jednadžbe. To znači da moramo drugačije opisivati rješenja. U ovom slučaju, reći ćemo da su dva rješenja pelovske jednadžbe *iz iste klase* ako postoji rješenje Pellove jednadžbe tako da se množenje jednog rješenja dobije drugo. Tada možemo odabrati u skupu svih rješenja iz iste klase ono koje ima najmanji nenegativni y i nazvati ga fundamentalnim. Navedimo i teorem koji nudi jednu metodu nalaženja rješenja pelovske jednadžbe. Bitno je napomenuti da fundamentalnih rješenja pelovske jednadžbe može biti i više.

Teorem 4.1. *(Nagell) Neka je $u + v\sqrt{d}$ fundamentalno rješenje jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$. Tada za svako fundamentalno rješenje $x^* + y^*\sqrt{d}$ jednadžbe $x^2 - dy^2 = N$ vrijede nejednakosti*

$$0 \le y^* \le \frac{v}{\sqrt{2(u+\epsilon)}}\sqrt{|N|}$$

$$|x^*| \le \sqrt{\frac{1}{2}(u+\epsilon)|N|}$$

gdje je $\epsilon = 1$ ako je $N > 0$, a $\epsilon = -1$ ako je $N < 0$.

Primjer 4.2. *Riješite pelovsku jednadžbu $x^2 - 6y^2 = -29$.*

Rješenje:

Prvo dobivamo fundamentalno rješenje Pellove jednadžbe $x^2 - 6y^2 = 1$. To rješenje je $5 + 2\sqrt{6}$. Kako je $N < 0$ stavljamo $\epsilon = -1$. Imamo još $u = 5, v = 2$. Stoga uvrštavanje daje da za fundamentalna rješenja polazne jednadžbe vrijedi

$$0 \le y^* \le \frac{2}{\sqrt{2(5-1)}}\sqrt{29} < 4 \implies 0 \le y^* \le 3$$

$$|x^*| \le \sqrt{\frac{1}{2}(5-1)29} = \sqrt{58} < 8 \implies |x^*| \le 7$$

Sada nažalost slijedi ručna provjera svih danih rješenja. Nakon fizičkog posla dobivamo da su jedina rješenja $5 + 3\sqrt{6}$ i $-5 + 3\sqrt{6}$. Sada su dakle sva rješenja zadana s

$$x + y\sqrt{6} = \pm(5 + 3\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n$$

ili

$$x + y\sqrt{6} = \pm(-5 + 3\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n$$

To daje jedina dva niza rješenja u

$\Diamond$

5 Zadatci

Zadatak 10. Za dani $d \in \mathbb{Z}$ riješite jednadžbu $x^2 - dy^2 = 1$ u skupu racionalnih brojeva.

Zadatak 11. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Nađite osnovno rješenje Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ ako je $d = n^2 + n$.

Zadatak 12. Pronađite sve $n \in \mathbb{N}$. Takve da je $\binom{n}{k-1} = 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ za neki prirodan broj $k < n$.

Zadatak 13. Odredite sve prirodne brojeve d za koje Pellova jednadžba $x^2 - dy^2 = 1$ ima rješenje za koje vrijedi $x - y = d$.

Zadatak 14. Ako je p prost broj oblika $4k + 3$ dokažite da jedna i samo jedna od jednadžbi $x^2 - py^2 = \pm 2$ ima cjelobrojno rješenja.

Zadatak 15. (ISL 2000 N5) Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da je $p = nr$, gdje su p i r redom poluopseg i radijus upisane kružnice trokuta sa cjelobrojnim stranicama.

6 Hintovi

Hint 1: Direktnim računom raspišite x_{n+2}, y_{n+2}.

Hint 2: Uvijeti u Dirichletovom teoremu ostaju isti čak i nakon dijeljenja sa zajedničkim djeliteljem (p, q).

Hint 3: Iskoristite Dirichletov princip.

Hint 4: Prvo pokažite da se radi o cijelim brojevima, a tada se direktno dokazuje tvrdnja.

Hint 5: Pretpostavite suprotno, tada oduzimanjem dobivate $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_1)\sqrt{d} = 0$. Dokažite kontradikciju.

Hint 6: Prvo pokažite da ako se razlomak "zaustavi" onda očito mora biti racionalni broj. Složite obrat.

Hint 7: Primijetite u kojem trenutku se uzorak ponavlja.

Hint 8: Koristite prethodni teorem da primijetite kad treba zaustaviti algoritam.

Hint 9: Najveći cijeli broj manji od $\sqrt{d^2+1}$ je d. Racionalizirajte $\sqrt{d^2+1} - d$.

Hint 10: Ovo uopće nije Pellov(sk)a jednadžba.

Hint 11: Vrijedi $n < \sqrt{n^2+n} < n+1$. Razvijte $\sqrt{d}$ u verižni razlomak.

Hint 12: Pomnožite sa $\frac{(k+1)!)(n-k+1)!}{n!}$.

Hint 13: Preformulirajte jednadžbu u $2dx + (d^2 - 1) = (d-1)x^2$.

Hint 14: Razmatrajte jednakost $(x_0 - 1)(x_0 + 1) = py_0^2$ za (x_0, y_0) fundamentalno rješenje pripadne Pellove jednadžbe.

Hint 15: Koristite supstituciju $x = p - a, y = p - b, z = p - c$ gdje je p poluopseg.

7 Rješenja

Zadatak 1. Dokažite da ukoliko je (x_n, y_n) rješenje Pellove jednadžbe $x^2 - 2y^2 = 1$, onda je to i (x_{n+2}, y_{n+2}) definirano preko prethodnih jednadžbi

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n$$
$$y_{n+1} = x_n + y_n$$

Rješenje:

Računamo

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2y_{n+1}$$
$$y_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}$$

Sada uvrštavamo x_{n+1}, y_{n+1} i imamo

$$x_{n+2} = (x_n + 2y_n) + 2(x_n + y_n) = 3x_n + 4y_n$$
$$y_{n+2} = (x_n + 2y_n) + (y_n + x_n) = 2x_n + 3y_n$$

Sada imamo

$$x_{n+2} - 2y_{n+2} = (3x_n + 4y_n)^2 - 2(2x_n + 3y_n)^2 = 9x_n^2 + 24x_ny_n + 16y_n^2 - 8x_n^2 - 24x_ny_n - 18y_n^2 = x_n^2 - 2y_n^2 = 1$$

Zadnja jednakost vrijedi jer smo pretpostavili da je (x_n, y_n) rješenje spomenute Pellove jednadžbe.

◊

Zadatak 2. Korištenjem Dirichletovog teorema dokažite Lemu 2.1.

Rješenje:

Kao što je rečeno u hintu, zahtijevamo $\gcd(p, q) = 1$. Znači, za $Q > 1$ postoje relativno prosti cijeli brojevi p, q tako da

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{Qq} < \frac{1}{q^2}$$

Kako $\alpha \notin \mathbb{Q}$, vrijedi $|\alpha q - p| \neq 0$. Pretpostavljamo da postoji konačno brojeva $\frac{p_i}{q_i}$, $\quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ koji zadovoljavaju tvrdnju, Izaberimo $m \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{1}{m} < |\alpha q_i - p_i|$ za sve i. Sada ponovo koristimo Dirichletov teorem uz $Q = m$ i dobivamo novi racionalni broj koji zadovoljava tvrdnju, ali i $|\alpha q - p| < \frac{1}{m}$. Sada je taj broj nužno različit od $\frac{p_i}{q_i}$, što je suprotno pretpostavci da su to svi takvi brojevi.

◊

Zadatak 3. U Teoremu 2.2, dokažite da postoje rješenja (x_1, y_1) i (x_2, y_2) takva da vrijedi

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{k}$$
$$y_1 \equiv y_2 \pmod{k}$$

Rješenje:

Radimo Dirichletov princip s konačno mnogo kutija i beskonačno zečeva. Kutija ima k^2 i numeriramo ih (a,b) gdje su $a,b \in \{0,1,2,\dots,k\}$ i kažemo da se rješenje (x,y) nalazi u kutiji (a,b) ako vrijedi

$$x \equiv a \pmod{k}$$

$$y \equiv b \pmod{k}$$

Sada, kako imamo beskonačno mnogo rješenja jednadžbe, a samo konačno takvih klasa, odnosno kutija, možemo zaključiti da postoje rješenja $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ tako da

$$x_1 \equiv a \equiv x_2 \pmod{k}$$

$$y_1 \equiv b \equiv y_2 \pmod{k}$$

◊

Zadatak 4. U Teoremu 2.2, dokažite da je

$$x = \frac{x_1x_2 - dy_1y_2}{k}, y = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{k}$$

rješenje Pellove jednadžbe, odnosno da vrijedi $x, y \in \mathbb{Z}$ i $x^2 - dy^2 = 1$.

Rješenje:

Prvo dokažimo da se radi o cijelim brojevima. Naime, kako je po prethodnom zadatku

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{k}$$

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{k}$$

onda množenje daje

$$x_1y_2 \equiv x_2y_1 \pmod{k}$$

pa onda i $k|x_1y_2 - x_2y_1$. S druge strane, vrijedi $x_1^2 - dy_1^2 = k$ odnosno $x_1^2 \equiv dy_1^2 \pmod{k}$. Sada možemo sa svake strane zamijeniti jedan x_1 s x_2 odnosno y_1 s y_2. Tako dobivamo da su razlomci cijeli brojevi. Nadalje, preostaje dokazati da zadovoljavaju Pellovu jednadžbu.
Vrijedi

$$x^2 - dy^2 = \frac{x_1^2x_2^2 - 2dx_1x_2y_1y_2 + d^2y_1^2y_2^2}{k^2} - d\frac{x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2}{k^2}$$

Svođenjem na zajednički nazivnik i kraćenjem dobivamo

$$x^2 - dy^2 = \frac{x_1^2x_2^2 + d^2y_1^2y_2^2 - dx_1^2y_2^2 - dx_2^2y_1^2}{k^2} = \frac{x_2^2(x_1^2 - dy_1^2 + dy_2^2(dy_1^2 - x_1^2}{k^2}$$

Sada kada uvrstimo $x_1^2 - dy_1^2 = x_2^2 - dy_2^2 = k$ imamo

$$x^2 - dy^2 = \frac{kx_2^2 - kdy_2^2}{k^2} = \frac{k^2}{k^2} = 1$$

čime je tvrdnja dokazana.

◊

Zadatak 5. Ukoliko su $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ i $d \in \mathbb{N}$ takav da $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$, onda vrijedi

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = x_2 + y_2\sqrt{d} \implies x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

Rješenje:

Pretpostavimo da je $x_1 + y_1\sqrt{d} = x_2 + y_2\sqrt{d}$. Tada imamo

$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\sqrt{d} = 0$$

Stavimo $x = x_1 - x_2$ i $y = y_2 - y_1$ Sada imamo

$$x = y\sqrt{d}$$

Sada, ako je $y = 0$ onda je $x = 0$ pa smo dobili traženu implikaciju. Ukoliko nije, podijelimo

$$\frac{x}{y} = \sqrt{d}$$

Sada dobivamo da je korijen prirodnog broja koji nije potpun kvadrat racionalan broj, što je kontradikcija. Dokaz da to nije moguće je sljedeći: pretpostavimo da je p neki prosti djelitelj od d takav da je najveća potencija p koja dijeli d neparna. Sada kvadriranje daje

$$x^2 = dy^2$$

Kako $p|d$, mora $p|x^2 \implies p|x$. Sada vidimo da lijevu stranu jednakosti dijeli parna potencija od p. S druge strane, d dijeli neparna potencija, a y^2 također može dijeliti samo parna potencija pa ulazimo u kontradikciju.

$\Diamond$

Zadatak 6. Dokažite da se algoritam za razvoj u verižni razlomak zaustavlja ako i samo ako je $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. U

Rješenje:

Prvo uočimo da, ukoliko se algoritam zaostavi, onda množenjem unazad dobivamo razlomak, pa je i početni broj morao biti razlomak, odnosno racionalan. S druge strane, provođenje algoritma na racionalnom broju je svojevrsni analogon Euklidovog algoritma. Neka je $\frac{m}{n} > 1$ neki racionalan broj. Tada, u trenutku oduzimanja imamo

$$\frac{m}{n} - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor = \frac{m - \alpha n}{n}$$

gdje je $\alpha \in \mathbb{N}$ takav da je $m - \alpha n < n$ (dijeljenje s ostatkom). Potom u algoritmu obrnemo razlomak i ponavljamo postupak. Vidimo da ćemo u k-tom razlomku imati $\frac{m_k}{n_k}$ gdje je (m_k, n_k) uređeni par u k-tom koraku Euklidovog algoritma. Znamo da se Euklidov algoritam uvijek zaustavlja.

$\Diamond$

Zadatak 7. Primijenite algoritam za razvoj u verižni razlomak na $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$.

Rješenje:

Prvo uočimo da je $1 < \sqrt{2} < 2$. Sada imamo da je

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{2-1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\sqrt{2}-1}}$$

Vidimo tako da u proizvoljno ponavljanja postupka imamo

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$$

. To je također poseban slučaj zadatka 9. uz uzimanje $d = 1$.
Sada uočavamo isto tako da $1 < \sqrt{3} < 2$. Sada imamo

$$\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} - 1 = 1 + \frac{2}{2 + \sqrt{3} - 1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\sqrt{3}-1}}$$

Nastavljanjem raspisa lako se uviđa da je $\sqrt{3} = [1, \overline{12}]$.

$\lozenge$

Zadatak 8. Razvijte broj $\sqrt{15}$ u verižni razlomak. Zapišite ga skraćenom notacijom.

Rješenje:

Isto kao i u prethodnom zadatku provodimo algoritam. Naime, dovoljno je ocijeniti $3 < \sqrt{15} < 4$ te onda znamo kako moramo oduzimati. Nema smisla ponovo ovdje pisati cijeli postupak pa dajemo samo točno rješenje za provjeru:

$$\sqrt{15} = [3, \overline{1, 6}]$$

U trenutku kada raspisivanjem dolazimo do 6 uočavamo da se radi o $2 \cdot 3$ pa znamo da treba zaustaviti postupak.

$\lozenge$

Zadatak 9. Neka je $d \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{d^2 + 1} = [d, \overline{2d}]$$

Rješenje:

Uočavamo da je $d < \sqrt{d^2 + 1} < d + 1$, pa imamo

$$\sqrt{d^2 + 1} = d + \sqrt{d^2 + 1} - d = d + \frac{1}{d + \sqrt{d^2 + 1}} = d + \frac{1}{2d + \sqrt{d^2 + 1} - d} = \dots$$

Odnosno

$$\sqrt{d^2 + 1} = [d, \overline{2d}]$$

$\lozenge$

Zadatak 10. Za dani $d \in \mathbb{Z}$ riješite jednadžbu $x^2 - dy^2 = 1$ u skupu racionalnih brojeva.

Rješenje:

Kada $x \neq 1$ imamo

$$d\left(\frac{y}{x-1}\right) = \frac{x+1}{y}$$

Oznaka $\frac{y}{x-1} = t \in \mathbb{Q}$ i dobivamo

$$x = \frac{dt^2 + 1}{dt^2 - 1}, \quad y = \frac{2t}{dt^2 - 1}$$

$\Diamond$

Zadatak 11. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Nađite osnovno rješenje Pellove jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ ako je $d = n^2 + n$.

Rješenje:

Koristimo teorem za osnovno odnosno fundamentalno rješenje Pellove jednadžbe preko konvergenti verižnog razlomka. Naime, zanima nas verižni razlomak za $\sqrt{n^2+n}$. Lako vidimo da je $n < \sqrt{n^2+n} < n+1$. Sada imamo

$$\sqrt{n^2+n} = n + \sqrt{n^2+n} - n = n + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = n + \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}}$$

$$\sqrt{n^2+n} = n + \frac{1}{2 + \frac{1}{2n+\sqrt{n^2+n}-n}}$$

Sada vidimo da je $\sqrt{n^2+n} = [n, \overline{2, 2n}]$. Pošto je period paran, pa po teoremu o fundamentalnim rješenjima Pellove jednadžbe vidimo da je fundamentalno rješenje prva konvergenta. Radi se o $n + \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{2}$ što daje fundamentalno rješenje $(2n+1, 2)$.

$\Diamond$

Zadatak 12. Pronađite sve $n \in \mathbb{N}$. Takve da je $\binom{n}{k-1} = 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ za neki prirodan broj $k < n$.

Rješenje:

Pomnožimo izraz sa $\frac{(k+1)!)(n-k+1)!}{n!}$. Sada dobivamo jednadžbu

$$k(k+1) = 2(k+1)(n-k+1) + (n-k)(n-k+1)$$

Sređivanje daje

$$n^2 + 3n + 2 = 2k^2 + 2k$$

Odnosno

$$(2n+3)^2 + 1 = 2(2k+1)^2$$

Sada je to jednadžba

$$(2n+3)^2 - 2(2k+1)^2 = -1$$

Sada koristimo saznanja o jednadžbi $x^2 - 2y^2 = -1$. Fundamentalno rješenje te jednadžbe je $1, 1$. Nadalje, sada su sva rješenja te jednadžbe dana s

$$x_1 + y_1\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{2i+1}$$

Sada je $n = \frac{x_i - 3}{2}$ i to daje sva rješenja.

$\Diamond$

Zadatak 13. Odredite sve prirodne brojeve d za koje Pellova jednadžba $x^2 - dy^2 = 1$ ima rješenje za koje vrijedi $x - y = d$.

Rješenje:

Zanima nas rješenje jednadžbe $(x+d)^2 - dx^2 = 1$ u $\mathbb{N}$. Zapišimo tu jednadžbu kao

$$2dx + (d^2 - 1) = (d-1)x^2$$

Sada imamo $d-1|2dx$ odnosno $d-1|2x$ ako stavimo $2x=(d-1)t$ imamo

$$4dt+4(d+1)=(d-1)^2t^2$$

Sada slijedi

$$(8d+4)t \geq (d-1)t^2 \geq (d-1)^2t$$

te $(d-1)^2 > 8d+4$. Tako dobivamo ogradu $d \leq 10$. Sada provjera malenih slučajeva daje da je $d=5 \implies (x,y)=(9,4)$ jedino rješenje.

$\Diamond$

Zadatak 14. Ako je p prost broj oblika $4k+3$ dokažite da jedna i samo jedna od jednadžbi $x^2-py^2=\pm 2$ ima cjelobrojno rješenja.

Rješenje:

Najviše jedna od te dvije jednadžbe ima rješenje. Sada, ako je (x_0,y_0) fundamentalno rješenje odgovarajuće Pellove jednadžbe, ako $x_0 \pm 1$ nisu relativno prosti, jednakost

$$(x_0-1)(x_0+1)=py_0^2$$

daje

$$x_0 \pm 1 = 2x^2$$

$$x_0 \mp 1 = 2py^2$$

odnosno

$$x^2-py^2=\pm 1$$

a i jedno i drugo je nemoguće. Sada slijedi da su $x_0\pm$ relativno prosti, što ovog puta daje $x_0 \pm 1 = x^2$ i $x_0 \mp 1 = py^2$, odnosno $x^2-py^2=\pm 2$.

$\Diamond$

Zadatak 15. (ISL 2000 N5) Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da je $p=nr$, gdje su p i r redom poluopseg i radijus upisane kružnice trokuta sa cjelobrojnim stranicama.

Rješenje:

Poznato je da je površina trokuta $S=pr=\frac{p^2}{n}$ i $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Slijedi da je

$$p^3=n^2(p-a)(p-b)(p-c)$$

Supstitucija kao u hintu daje

$$(x+y+z)^3=n^2xyz$$

Dokazujemo da ta jednadžbe ima rješenje u skupu prirodnih brojeva za beskonačno mnogo n. Pretpostavimo da je $z=k(x+y)$ za neki cijeli broj $k>0$. Tada ranija jednadžba postaje

$$(k+1)^3(x+y)^2=kn^2xy$$

Nadalje, stavimo da je $n=3(k+1)$ i jednadžba postaje

$$(k+1)(x+y)^2=9kxy$$

Sada stavimo $t=\frac{x}{y}$ Tada prethodna jednadžba ima prirodna rješenja ako i samo ako $(k+1)(t+1)^2=9kt$ ima racionalna rješenja. Odnosno, onda i samo onda kada je diskriminanta $D = k(5k - 4)$ potpun kvadrat. Stavimo $k = u^2$, te moramo pokazati da $5u^2 - 4 = v^2$ ima beskonačno mnogo cijelih rješenja. Ta jednadžba, s druge strane, je pellovska jednadžba za koju se lako pokaže da su joj rješenja po u Fibonaccijevi brojevi.

$\Diamond$