S8	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2021./22.

Funkcijske jednadžbe

Mislav Brnetić

27. studeni 2021.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

Općenito, pod pojmom funkcijske jednadžbe podrazumijevamo jednadžbe čija su rješenja funkcije, odnosno tražimo sve funkcije koje zadovoljavaju zadane uvjete.
Za početak, prisjetimo se nekih osnovnih pojmova vezanih za funkcije kao i same definicije funkcije.
Ovi pojmovi i neka njihova svojstva trebat će nam pri rješavanju zadataka.

Definicija 1
Funkcija je uređena trojka (A, B, f) gdje je A domena, B kodomena i f pravilo pridruživanja koje svakom elementu domene pridružuje točno jedan element iz kodomene. Zapisuje se $f : A \to B$ gdje je A domena, a B kodomena.

Definicija 2
Slika funkcije je skup svih vrijednosti koje funkcija postiže.

Slika funkcije je podskup kodomene.

Definicija 3
Injekcija je funkcija za koju vrijedi:

$$f(a) = f(b) \implies a = b$$

odnosno za različite vrijednosti iz domene postiže različite vrijednosti iz kodomene.

Definicija 4
Surjekcija je funkcija za koja poprima sve vrijednosti iz kodomene, odnosno za svaki y iz kodomene postoji x iz domene za koji je $f(x) = y$.

Definicija 5
Bijekcija je funkcija koja je i injekcija i surjekcija.

Primjer 1. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ je i injekcija i surjekcija, dakle i bijekcija, što se lako provjeri iz definicije.
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nije ni injekcija ni surjekcija.
Međutim, funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, \infty >$, $f(x) = x^2$ je surjekcija.

Teorem 6
Funkcija $f : A \to B$ ima inverz $f^{-1} : B \to A$ ako i samo ako je f bijekcija.

Oprez!

Primijetite kako pitanje je li funkcija surjekcija ovisi o izboru kodomene, a ne samo pravila pridruživanja.

Definicija 7

Parna funkcija je funkcija sa svojstvom da je za svaki x iz domene i $-x$ u domeni te vrijedi

$$f(-x) = f(x)$$

Definicija 8

Neparna funkcija je funkcija sa svojstvom da je za svaki x iz domene i $-x$ u domeni te vrijedi

$$f(-x) = -f(x)$$

Razmislite o obliku grafa parne i neparne funkcije.

Primjer 2. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ je neparna (što se lako provjeri po definiciji).
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ je parna.
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ je i parna i neparna.
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ nije ni parna ni neparna.
Za određivanje rješenja funkcijskih jednadžbi u principu je potrebno dokazati da:

- funkcija mora biti oblika dobivenog rješenja
- sve takve funkcije i jesu rješenja (najčešće uvrštavanjem)

Kod rješavanja funkcijskih jednadžbi može biti korisno primijeniti neku od sljedećih ideja:

- uvrštavanje $x = 0, 1, -1, 2, -2...$, $y = x...$
- određivanje $f(0), f(1)$
- dokazivanje injektivnost i surjektivnosti
- supstituiranje funkcija
- svođenje na Cauchyevu funkcijsku jednadžbu
- primjena funkcije na obje strane jednadžbe

Uvodni zadaci

1. Ako je $f(3x - 1) = 2x^2 - 3x + 5$ za sve $x \in \mathbb{R}$, odredite $f(x)$.

2. Zadana je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava

$$(f(2^{x^3+x}))^2 - f(2^{2x}) \leq 2 \quad \wedge \quad (f(2^{2x}))^3 - 3f(2^{x^3+x}) \geq 2$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.
Dokažite da ta funkcija nije injekcija.

3. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava

$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Dokažite da je f surjekcija.

4. Dana je funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ koja zadovoljava sljedeću nejednakost $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(f(n+1) - f(n))(f(n+1) + f(n) + 4) \leq 0$$

Dokažite da f nije injekcija.

5. Neka je $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ t. d.

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\max(f(x), f(y))$$

Dokažite da je f parna.

Umjereni zadaci

6. Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijekcija ako vrijedi $f(f(x)) = x$ za sve realne brojeve x.

7. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi:

$$f(x) + xf(1-x) = x$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.

8. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da:

$$f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$$

za sve x, $y \in \mathbb{R}$.

9. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava jednadžbu $x + f(x) = f(f(x))$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Odredi sva rješenja jednadžbe $f(f(x)) = 0$.

10. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju

$$f(xyz) = xf(x) + yf(y) + zf(z).$$

11. *(Cauchyjeva funkcijska jednadžba)* Neka je $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ t. d.

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Odredite sva rješenja ove funkcijske jednadžbe.

12. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da:

$$f(x+y) + f(x)f(y) = x^2y^2 + 2xy$$

za sve x, $y \in \mathbb{R}$.

13. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y))$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

14. Nađi sve $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da vrijedi $f(0) = 1$ i

$$f(f(n)) = f(f(n+2) + 2) = n$$

za sve cijele brojeve n.

15. Nađi sve $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da vrijedi:

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

za sve x, $y \in \mathbb{Z}$.

Teži zadaci

16. Odredi sve $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju

$$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y)$$

17. Odredi sve $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

18. Odredi sve $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

19. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ koje za sve $a, b \in \mathbb{Z}$ zadovoljavaju

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Više zadataka možete pronaći na `www.skoljka.org`.

Hintovi

1. Napravite supstituciju $y = 3x - 1$.

2. Za koje x je $2^{x^3+x} = 2^{2x}$? Koje vrijednosti funkcija može poprimiti u tim točkama?

3. Dokažite da je $f(t) = c + x$, gdje je t neki izraz koji ovisi o x, a c neka konstanta. (*Zašto je to dovoljno?*)

4. Dokažite da je funkcija po apsolutnoj vrijednosti padajuća.

5. Uvrstite (y, x) u funkciju.

6. Primijenite *Teorem 6.*

7. Uvrstite $(1 - x)$ za x kako biste dobili i drugu jednakost koja podsjeća na zadanu.

8. Uvrstite $(0, 0)$ te (x, x) za (x, y).

9. Tekst.

Rješenja

1. Napravimo supstituciju $y = 3x - 1$, kako bi unutar zagrade u funkciji dobili jednostavnu varijablu. Tada je $x = \frac{y+1}{3}$.
Sada slijedi $f(y) = \dfrac{2y^2 - 5y + 38}{9}$.

2. A.H. Parvardi: Functional Equations in Mathematical Olympiads: Problems and Solutions, Vol. 1, Example 2

3. A.H. Parvardi: Functional Equations in Mathematical Olympiads: Problems and Solutions, Vol. 1, Example 1

4. A.H. Parvardi: Functional Equations in Mathematical Olympiads: Problems and Solutions, Vol. 1, Example 3

5. A.H. Parvardi: Functional Equations in Mathematical Olympiads: Problems and Solutions, Vol. 1, Example 5

6. Po *Teoremu 6.* znamo da je funkcija bijekcija ako i samo ako ima inverz.
Ako vrijedi $f(f(x)) = x$, zaključujemo kako je funkcija f upravo sama sebi inverz, dakle mora biti i bijekcija.

7. Uvrstimo li $(1 - x)$ za x, dobivamo:

$$f(1 - x) + (1 - x)f(x) = 1 - x$$

Ovo sada možemo riješiti kao sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice (gdje su $f(x)$ i $f(1 - x)$ nepoznanice):

$$f(x) + xf(1 - x) = x$$
$$f(1 - x) + (1 - x)f(x) = 1 - x$$

Kao rješenje dobivamo:

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x + x^2}$$

Preostaje još provjeriti uvrštavanjem da ova jednadžba zadovoljava početnu jednakost za sve $x \in \mathbb{R}$, što zaista i zadovoljava.

8. Uvrštavanjem $(0, 0)$ za (x, y) u zadanu jednakost dobivamo:

$$f(0) = 2f(0)$$

odakle slijedi $f(0) = 0$.
Sada, uvrstimo li (x, x) za (x, y), dobivamo:

$$f(0) = 2f(x) - 2x^2$$
$$\implies 0 = 2f(x) - 2x^2$$
$$f(x) = x^2$$

Sada lako uvrštavanjem ovog rješenja u zadanu jednadžbu provjerimo da to zaista i jest rješenje.

9. Tekst.