Dijeljivost, prosti brojevi

S10	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2021./2022.

Luka Milačić

18. prosinca 2021.

Mladi nadareni matematičari
”Marin Getaldić”

mnm.hr Mladi nadareni matematičari ”Marin Getaldić” matematicari.mnm

Uvod

U ovom predavanju fokusiramo se na djeljivost prirodnih brojeva, pa prema tome i na njihove proste djeljitelje. Korisno bi bilo koristiti se kongruencijama i malim Fermatovim i Eulerovim teoremom. Ipak većina zadataka se svodi na domišljatost više nego na primjenu nekih teških teorema.

1. Odredi sve četvroke prirodnih brojeva (a, b, c, d) tako da vrijedi:

$$a^3 = b^2\ ,\ c^5 = d^4\ \ i\ \ a - c = 9$$

2. Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji niz od n uzastopnih prirodnih brojeva koji nisu prosti.

3. Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji niz od n uzastopnih prirodnih brojeva od kojih niti jedan nije potencija prostog broja.

4. Odredi sve prirodne brojeve a,b i c za koje vrijedi

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$$

5. Dokažite da ne postoji prirodan broj n takav da $6^n - 1|7^n - 1$.

6. Neka je n prirodan broj i $d(n)$ broj svih njegovih djeljitelja. Odredi sve n za koje vrijedi

$$d(n)^3 = 4n$$

7. Odredi sve prirodne brojeve $n \geq 2$ koji zadovoljavaju sljedeći uvijet: za bilokoja 2 prirodna broja a i b relativno prosta sa n vrijedi

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \text{ako i samo ako} \qquad ab \equiv 1 \pmod{n}.$$

8. Odredi sve prirodne brojeve koji su relativno prosti sa svim članovima niza

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

9. Neka su $n > 1$ i b prirodni brojevi. Predpostavimo da za svaki prirodni k postoji prirodan broj a_k takav da $k|b - a_k^n$. Dokaži da je $b = A^n$ za neki prirodan broj A.

10. Kažemo da je skup A dobar ako

$$x, y \in A \to x^2 + kxy + y^2 \in A, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva (m, n) za koje vrijedi ta ako su oni u A onda je $A = \mathbb{Z}$.

11. Odredi sve prirodne brojeve $m \geq 2$ takve da $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\dfrac{m}{3} \leq n \leq \dfrac{m}{2}$ te

$$n|\binom{n}{m-2n}$$

.

1. 2. razred 3. zadatak
2. Uzmemo $a_i = (n+1)! + 1 + i$, za svaki i od 1 do n, $(i+1)|a_i$, $a_i > i+1$ pa sigurno nije prost.
3. Uzmemo $a_i = ((n+1)^2)! + 1 + i$, za svaki i od 1 do n, $(i+1)|a_i$, no $(i+1)^2$ ne dijeli a_i(ako ne razumješ probaj izlučiti), pa zato a_i nemože biti potencija prostog broja.
4. 1. razred 4. zadatak
5. 1. razred 2. zadatak
6. Riješenje
7. Riješenje
8. Riješenje
9. Riješenje
10. Riješenje
11. Riješenje