G12 seniorska grupa
Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2021./22.

Upisana i pripisana kružnica

Katja Varjačić

22. siječnja 2022.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

Definicije

- *Upisana kružnica* trokuta ABC je kružnica unutar trokuta koja dodiruje sve 3 njegove stranice. Njezino središte najčešće označavamo s I ili U.
- *A-pripisana kružnica* trokuta ABC ili *pripisana kružnica* stranici BC trokuta ABC je kružnica izvan trokuta koja dodiruje stranicu BC te produžetke stranica AB i AC preko vrhova B i C. Njezino središte najčešće označavamo s I_A.

Činjenice

- Središte upisane kružnice trokuta ABC nalazi se u sjecištu simetrala kuteva trokuta ABC.
- Središte A-pripisane kružnice trokuta ABC nalazi se u sjecištu simetrale kuta pri vrhu A trokuta ABC te simetrala vanjskih kuteva pri vrhovima B i C trokuta ABC.
- Udaljenost vrha A od točaka u kojima upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranice AB i AC iznosi $s-a$ pri čemu je $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Analogno vrijedi i za preostala 2 vrha trokuta.
  Nadalje, udaljenost vrha A od točaka u kojim A-pripisana kružnica dodiruje produžetke stranica AB preko B te AC preko C iznosi s. Ponovno, analogna tvrdnja vrijedi i za ostale vrhove trokuta.
- U trokutu ABC se simetrala kuta pri vrhu A i simetrala stranice BC sijeku na opisanoj kružnici trokuta.
- (*Lema o trozupcu*) Neka je ABC trokut sa središtem upisane kružnice I, središtem A-pripisane kružnice I_A te polovištem L luka BC (koji ne sadrži točku A) na opisanoj kružnici trokuta ABC. Tada je L središte kružnice koja sadrži točke B, I, C te I_A.
- Neka je T točka izvan kružnice k. Neka pravac p_1 kroz T siječe k u točkama A i B te neka je pravac p_2 kroz T tangenta na k koja dodiruje tu kružnicu u točki C. Tada vrijedi $TA \cdot TB = TC^2$. (Analogno vrijedi i ako je točka T unutar kružnice samo onda nema tangente, već je umnožak udaljenosti točke T od sjecišta pravca p kroz nju s kružnicom k konstantan.) Promatrani umnožak $TA \cdot TB$ zove se *potencija* točke T na kružnicu k.
- Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice. Tada je skup svih točaka kojima je potencija točke na te 2 kružnice jednaka, pravac koji nazivamo *radikalna os* kružnica k_1 i k_2.
- *(Ptolomejev teorem)* Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Tada vrijedi jednakost:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

Zadaci

1. Dokaži 4. činjenicu.
2. Dokaži 5. činjenicu.
3. (a) Dokaži 3. činjenicu.
   (b) Dokaži $r_a = \frac{s}{s-a} r$, gdje je r_a polumjer pripisane kružnice, a r polumjer upisane kružnice.
4. Dan je trokut ABC. Upisana i A-pripisana kružnica su tangentne na $\overline{BC}$ u redom D i X. Dokaži $|BD| = |CX|$.
5. Dan je trokut ABC. Neka su I_A, I_B i I_C središta pripisanih kružnica. Dokaži da trokut $I_A I_B I_C$ ima ortocentar I i da su A, B i C nožišta visina.

6. Neka su D, E i F redom nožišta visina iz vrhova A, B i C u trokutu ABC. Dokaži da je ortocentar H trokuta ABC ujedno i središte upisane kružnice trokuta DEF.

7. Stranice trokuta ABC sa središtem upisane kružnice I te opisanom kružnicom ω, zadovoljavaju jednakost $2BC = AB + AC$. Neka je D drugi presjek pravca AI i kružnice ω. Dokaži da je I polovište dužine AD.

8. Kružnica upisana u trokut ABC dodiruje stranice BC, CA i AB redom u točkama D, E i F. Za točku K koja se nalazi s iste strane pravca EF kao i točka A vrijedi $\angle KFE = \angle ACB$ te $\angle KEF = \angle ABC$. Dokažite da su pravci KD i BC okomiti.

Teži zadaci

1. Dan je trokut $\triangle ABC$. Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M. Kružnica s promjerom $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{LM}$ u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q. Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k.

2. Neka je $ABCD$ jednakokračni trapez u kojem je $AB \parallel CD$. Upisana kružnica ω trokuta BCD dira $\overline{CD}$ u točki E. Neka je F točka na simetrali kuta $\angle DAC$ takva da je $EF \perp CD$. Neka kružnica opisana trokutu $\triangle ACF$ siječe pravac CD u točkama C i G. Dokaži da je trokut $\triangle AFG$ jednakokračan.

3. Četverokut $ABCD$ je opisan oko kružnice k. Sjecište dijagonale AC i kružnice k koje je bliže točki A označimo s E. Neka je točka F dijametralno suprotna točki E na kružnici k. Tangenta na k u točki F siječe prave AB i BC redom u točkama A_1 i C_1 te pravce AD i CD redom u točkama A_2 i C_2. Dokažite $A_1C_1 = A_2C_2$.

4. Neka je J središte pripisane kružnice $\triangle ABC$ nasuprot vrha A. Ta pripisana kružnica dira stranicu BC u M, a stranice AB i AC u K i L redom. Pravci LM i BJ sijeku se u F, a pravci KM i CJ sijeku se u G. Neka je S presjek pravaca AF i BC, a neka je T presjek pravaca AG i BC. Dokaži da je M polovište dužine ST.

5. Neka je ABC trokut opsega 4. Na polupravcima AB i AC redom leže točke X i Y takve da je $AX = AY = 1$. Dužine BC i XY se sijeku u točki M. Dokaži da je opseg jednog od trokuta ABM i ACM jednak 2.

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.

Rješenja

1. Neka je D točka u kojoj simetrala stranice BC siječe opisanu kružnicu trokuta ABC. Iz svojstva točaka na simetrali dužine vrijedi $BD = CD$. Nadalje, obodni kutevi nad tetivama jednakih duljina su jednaki pa su kutevi $\angle BAD$ i $\angle CAD$ jednaki. Odatle je AD simetrala kuta $\angle BAC$ te je D upravo presjek simetrale kuta $\angle BAC$ i simetrale stranice BC, a po definiciji točke D, ona se nalazi na opisanoj kružnici trokuta.

2. Evan Chen - Fact 5

3. a) Rješenje 1. dijela: Označimo s D, E i F redom dirališta stranica BC, AB i CA s upisanom kružnicom. Primijetimo da su kutevi BDI te BEI pravi, da je $DI = EI = r$, pri čemu je r radijus upisane kružnice te da trokuti BDI i BEI dijele stranicu BI. Iz tog su razloga trokuti BDI i BEI sukladni po SKS poučku i dobivamo jednakost stranica $BD = BE$. Iz analognih sukladnosti pri vrhovima A i C dobivamo jednakosti $CD = CF$ te $AF = AE$. Imamo sljedeći niz jednakosti:

$$BD = a-CD = a-CF = a-(b-AF) = a-b+AF = a-b+AE = a-b+(c-BE) = a-b+c-BE = a-b+c-BD$$

Odatle dobivamo $BD = \frac{1}{2}(a-b+c) = s-b$, što je i trebalo pokazati, a analogne jednakosti slijede uvrštavanjem.

Rješenje 2. dijela: Označimo dirališta A-pripisane kružnice s pravcima AB, AC i BC redom s B_1, C_1 i N. Trokuti $\triangle AI_AB_1$ i $\triangle AC_1I_A$ su sukladni (zajednička stranica, pravi kut i $|I_AB_1| = |I_AC_1| = r_A$) pa vrijedi $|AB_1| = |AC_1|$. Analogno zaključujemo $|BB_1| = |BN|$ i $|CC_1| = |CN|$. Sada imamo $2|AB_1| = |AB_1| + |AC_1| = |AB| + |BB_1| + |AC| + |CC_1| = |AB| + |BN| + |AC| + |CN| = |AB| + |BC| + |AC| = opseg(\triangle ABC)$. Konačno slijedi $|AB_1| = |AC_1| = s$, što je trebalo i dokazati.

b) Trokuti $\triangle AEI$ i $\triangle AI_AB_1$ su slični. Naime, oba imaju jedan pravi kut i zajednički kut $\angle IAE = \angle I_AAB_1$. Iz omjera sličnosti i prethodno dokazanih činjenica $|AE| = s - a$ i $|AB_1| = s$ slijedi tvrdnja zadatka.

4. Označimo diralište A-pripisane kružnice s pravcem AC s C_1 i diralište upisane kružnice s AB s E. Koristeći tvrdnje prethodnih zadataka vrijedi $|BE| = |BD| = s - b$ i $|CX| = |CC_1| = |AC_1| - |AC| = s - b$, odakle slijedi $|BD| = |CX|$.

5. *Uputa:* Pokaže se da je $\angle IBI_A$ pravi. Analogno za druge kuteve.

6. Promotrimo četverokut $AFDC$. Vrijedi $\angle AFC = \angle ADC = 90°$ pa je taj četverokut tetivan (jednaki obodni kutevi nad istom tetivom). Stoga je

$$\angle ADF = \angle ACF = 180° - \angle CFA - \angle FAC = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$$

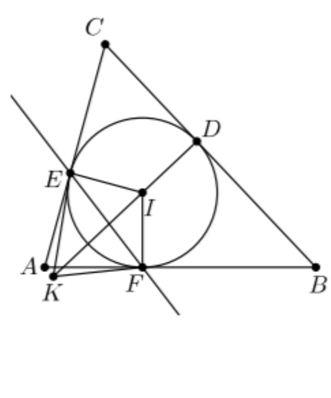
Analogno pokazujemo da je četverokut $ABDE$ tetivan, a onda sličnim postupkom kao ranije imamo

$$\angle ADE = \angle ABE = 180° - \angle BEA - \angle EAB = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$$

Dakle $DA = DH$ je simetrala kuta EDF. Za ostale kutove pokazujemo analogno pa je H upravo središte upisane kružnice.

7. HMMT 2013. - February - Team Round, Problem 6

8. srpsko okružno natjecanje, 2018., 1. razred, A varijanta - 3. zadatak
Neka je I središte upisane kružnice. Imamo $\triangle KEF \sim \triangle ABC$, pa dobivamo $\angle EKF = \angle BAC = 180° - \angle DIF$, što znači da je četverokut $EIFK$ tetivan. Slijedi $\angle KIF = \angle KEF = \angle ABC = 180° - \angle DIF$, pa su točke K, I, D kolinearne, odakle slijedi tvrdnja zadatka.



9. državno 2017. 2. razred

10. USAMO 1999.

11. Baltic way 2018., problem 14

12. IMO Shortlist 2012. G1

13. Let I_A be the center of the A-excircle, tangent to $\overline{BC}$ at T, and to the extensions of $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ at U and V. We see that $|AU| = |AV| = s = 2$. Then XY is the radical axis of the A-excircle and the circle of radius 0 at A. Therefore $|AM| = |MT|$. Assume without loss of generality that T lies on $\overline{MC}$, as opposed to $\overline{MB}$. Then $|AB| + |BM| + |MA| = |AB| + |BM| + |MT| = |AB| + |BT| = |AB| + |BU| = |AU| = 2$, as desired.