



Uvod

Teorem 1

Neka su $m_1, m_2, \dots, m_k$ međusobno relativno prosti prirodni brojevi, te neka je $M = m_1 m_2 \dots m_k$. Onda sustav

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

...

$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

ima točno jedno rješenje $x \pmod{M}$.

Ovaj teorem ne nosi previše sadržaja i uglavnom su u nekoj mjeri s njim svi upoznati intuitivno, na neki način kao i osnovni teorem aritmetike. To ne znači međutim da je teorem beskoristan, jer kad se stvari zakompliciraju, teorem nam pomaže da formalno riješimo zadatak.

Primjer 1. Pronađite rješenje sustava

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$x \equiv 4 \pmod{11}.$$

Rješenje. Uvrstimo $x = 11k + 4$. Očito onda dobivamo $k \equiv -1 \pmod{5}$. Uvrstimo sad $k = 5m - 1$ u izraz za x . Slijedi $x = 55m - 7$ odakle dobivamo $x \equiv -7 \pmod{55}$. ◀

Primjer 2. Dokaži da postoji 99 uzastopnih cijelih brojeva takvih da je svaki od njih djeljiv s nekim kvadratom većim od 1.

Rješenje. Uzmimo 99 različitih prostih brojeva p_i takvih da je $x \equiv -i \pmod{p_i^2}$ za neki x . Kako su prosti brojevi međusobno relativno prosti, znamo da ovaj sustav ima rješenje pa brojevi $x + i$, $i = 1, 2, 3, \dots, 99$ čine traženih 99 brojeva. ◀

Zadaci

1. Ako Ivan iz košare vadi dvije po dvije jabuke, na kraju ostane jedna u košari. Ako vadi po 3, ostanu mu dvije. Ako vadi po 4,5 ili 6, ostanu redom 3,4 ili 5 jabuka. Međutim ako vadi 7 po 7, košara ostane prazna. Koliki je najmanji broj jabuka u košari?
2. Odredite zadnje dvije znamenke broja 49^{19} .
3. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji uzastopnih n prirodnih brojeva takvih da ni jedan nije potencija prostog broja.
4. Za prirodan broj p , broj n zovemo *p-siguran* ako je razlika između n i bilo kojeg višekratnika broja p veća od 2. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10000 koji su istovremeno 7-sigurni, 11-sigurni i 13-sigurni? (Primjer: 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 23,... su 10-sigurni.)
5. Dokaži da za svaki n postoje cijeli brojevi a, b takvi da n dijeli $4a^2 + 9b^2 - 1$.

Teži zadaci

6. Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji $n + 1$ međusobno prostih brojeva k_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, takvih da je $k_0 k_1 \dots k_n - 1$ umnožak dva uzastopna cijela broja.

7. Dokaži da za svaki prirodan k postoji aritmetički niz racionalnih brojeva

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_k}{b_k}$$

gdje su a_i i b_i za $i = 1, 2, \dots, k$ prirodni relativno prosti brojevi, te su $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$ međusobno različiti.

8. Neka su $a > b > c \geq 3$ prirodni brojevi za koje vrijedi $a|bc + b + c$, $b|ca + c + a$ i $c|ab + a + b$. Dokaži da bar jedan od brojeva a, b, c nije prost.

9. Neka je $n \in \mathbf{N}$ i $a_1, a_2, \dots, a_k$ različiti brojevi ($k \geq 2$) iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ takvih da n dijeli $a_i(a_{i+1} - 1)$ za $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Dokaži da n ne dijeli $a_k(a_1 - 1)$.

10. Promatramo sve cjelobrojne točke koordinatnog sustava xy . Nazovimo točku (a, b) *vidljivom* ako su a i b relativno prosti. Dokaži da postoji 100×100 kvadrat u kojem nema vidljivih točaka.

Više zadataka možete pronaći na www.skoljka.org.