

Diofantske jednadžbe

1. Teorijski uvod

Definicija 1.1: Diofantske jednadžbe

Diofantske su jednadžbe s dvije ili više nepoznanica koje rješavamo u skupu prirodnih ili cijelih brojeva.

Ne postoji univerzalan način rješavanja svih diofantskih jednadžbi koje se pojavljuju na natjecanjima, ali postoje određene ideje koje su vrlo česte u rješavanju natjecateljskih zadataka.

1.1. Linearne diofantske jednadžbe

Teorem 1.2: Homogena linearna diofantska jednadžba

Diofantska jednadžba oblika $ax + by = 0$ gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, b \neq 0$ ima beskonačno mnogo cjelobrojnih rješenja, takvih da su $(x, y) = \left(\frac{tb}{M(a, b)}, \frac{-ta}{M(a, b)} \right)$ (zadanih uz pomoć $t \in \mathbb{Z}$)

Teorem 1.3: Linearna diofantska jednadžba

Diofantska jednadžba oblika $ax + by = c$ gdje su $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, b \neq 0$ ima cjelobrojna rješenja **ako i samo ako** $M(a, b)$ dijeli c . Tada ih ima beskonačno mnogo.

Tada su sva rješenja oblika zbroja jednog partikularnog i skupa rješenja homogenog.

Primjer 1. Riješimo homogenu diofantsku jednadžbu $3x + 5y = 0$.

Rješenje 1. Izrazimo jednu nepoznanicu pomoću druge: $3x = -5y$. Budući da je x cijeli broj, y mora biti djeljiv s 3, tj. y je oblika $y = 3t$ gdje je t neki cijeli broj. Iz toga dobivamo da je $x = -5t$. Dobili smo da su rješenja početne jednadžbe svi uređeni parovi $(-5t, 3t)$, $t \in \mathbb{Z}$ $\square$

Primjer 2. Riješimo diofantsku jednadžbu $3x + 5y = 7$.

Rješenje 2. Pokušajmo pronaći neki par (x_0, y_0) koji zadovoljava jednadžbu. Pogađanjem možemo naći uređen par $(-1, 2)$ što nam je zapravo jedno **partikularno** rješenje naše diofantske jednadžbe. Promatrajmo sada homogenu jednadžbu $3x + 5y = 0$. Iz prethodnog primjera znamo da su rješenja te jednadžbe svi uređeni parovi $(-5t, 3t)$, gdje je $t \in \mathbb{Z}$.

Iz Teorema 1.3. zaključujemo da su rješenja opće jednadžbe parovi $(-1 - 5t, 2 + 3t)$, $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

1.1.1 Zadatci za samostalno rješavanje

1. Riješi homogenu diofantsku jednadžbu: $4x - 10y = 0$.
2. Riješi homogenu diofantsku jednadžbu: $6x - 10y = 8$.
3. Riješi homogenu diofantsku jednadžbu: $9999x - 99999y = 37373747$.

1.2. Metoda faktORIZACIJE

Primjer 3. Riješi diofantsku jednadžbu: $(x + 3)(y - 7)(x + y) = 0$.

Lema 1.4: Umnožak faktora jednak nuli

Umnožak faktora je nula *ako i samo ako* je **barem** jedan od faktora nula.

Rješenje 3. Po prethodnoj lemi, vidimo da su rješenja oblika $x = -3, y \in \mathbb{Z}$ (ako je prva zagrada jednaka nuli), $x \in \mathbb{Z}, y = 7$ (ako je druga zagrada jednaka nuli) i $x = -y$ (ako je treća zagrada jednaka nuli; ovo možete zapisati i preko nekog parametra).

Nema veze što se neki skupovi rješenja preklapaju, na primjer $(x, y) = (-3, 3)$ (kada su prva i treća zagrade jednake nuli), bitno je samo da pokrijete sva rješenja. $\square$

Primjer 4. Riješimo diofantsku jednadžbu $xy + 2x - 3y - 6 = 0$.

Rješenje 4. Zadana jednadžba zapravo je jednaka: $(y + 1)(x - 3) = 3$. Dakle, dovoljno je riješiti samo slučajeve kada je jedna zagrada jednaka ± 1 , a druga ± 3 . Sada izjednačavamo zagrade s tim vrijednostima. Konkretno, rješenja su $(x, y) = (2, 4), (0, 6), (-4, 2), (-2, 0)$. $\square$

Oprez

Pazite da ne možete slobodno neovisno izabrati hoće li jedna zagrada biti pozitivna, a druga negativna. Na primjer, ako odlučite da je prva zagrada 1, onda druga nužno mora biti 3 (a ne -3). Slično, ako je jedna zagrada -3 , onda druga mora biti -1 . Razlog tomu je što kad pomnožimo zagrade moramo dobiti 3.

1.2.1 Zadatci za samostalno rješavanje

4. Riješi u cijelim brojevima: $4x^2 + 2xy + 2x + y = 0$.
5. Riješi u cijelim brojevima: $6x^2 - 13xy + 6y^2 = 4$.
6. Nađi sva cijelobrojna rješenja za: $x^2 + 37^2 = y^2$.

1.3. Metoda kvocijenata

Cilj metode kvocijenata je izraziti jednu nepoznanicu u potpunosti preko druge, i onda komentirati slučajeve kada je izraz cijeli broj.

Lema 1.5: Zatvorenost na zbrajanje i oduzimanje

Skup cijelih brojeva zatvoren je i s obzirom na zbrajanje i oduzimanje, tj. ukoliko cijelom broju oduzmemo ili pribrojimo drugi cijeli broj, rezultat će i dalje biti cijeli broj.

Specijalan slučaj ovoga je:

$$A \pm \frac{B}{P(x)} \in \mathbb{Z} \implies \frac{B}{P(x)} \in \mathbb{Z} \implies P(x) \mid B$$

Primjer 5. Riješi diofantsku jednadžbu $xy + 2y = x$.

Rješenje 5. $y(x + 2) = x \iff y = \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$. Sada vidimo da je $x + 2 \in (1, -1, 2, -2)$ jer mora biti djelitelj od 2 kako bi razlomak bio cijelobrojan, pa je $x \in \{-1, -3, 0, -4\}$ i (daljnjim uvrštavanjem) $y \in \{-1, 3, 0, 2\}$. $\square$

Primjer 6. Riješi diofantsku jednadžbu: $xy + 3y^2 = 11$

Rješenje 6. $xy = -3y^2 + 11 \iff x = \frac{-3y^2 + 11}{y} = -3y + \frac{11}{y}$ pa je $y \in \{1, -1, 11, -11\}$, što daje rješenja redom $x \in \{8, -8, -32, 32\}$. $\square$

1.3.1 Zadatci za samostalno rješavanje

7. (Školsko 2019. SŠ1 5.) Odredi sve parove (m, n) cijelih brojeva za koje vrijedi

$$mn + 5m + 2n = 121$$

8. (Državno 1998. SŠ1 2.) Nađite sve prirodne brojeve m i n koji zadovoljavaju jednadžbu:

$$10(m + n) = mn$$

1.4. Metoda posljednje znamenke

Metoda posljednje znamenke je samo poseban slučaj *metode kongruencija* kojom ćemo se pozabaviti neki drugi put koristeći kao uvod [predavanje s ovogodišnje Ljetne škole](#).

Primjer 7. Riješi diofantsku jednadžbu $x^2 + 10y = 1234567$.

Rješenje 7. Kvadrat cijelog broja može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. S obzirom da $10y$ završava znamenkom 0, zadnja znamenka od $x^2 + 10y$ može biti 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 7, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja. $\square$

Primjer 8. Riješimo diofantsku jednadžbu $x^2 + 5y = 37191834641769123$.

Rješenje 8. Budući da kvadrat cijelog broja završava sa znamenkom 0, 1, 4, 5, 6, ili 9, a broj $5y$ sa znamenkom 0 ili 5, slijedi da zbroj na lijevoj strani završava s 0, 1, 4, 5, 6, ili 9, a nikako s 3. Dakle, zadana diofantska jednadžba nema rješenja. $\square$

1.4.1 Zadatci za samostalno rješavanje

9. Nađi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takvih da vrijedi:

$$6^a + 5^b = 3737 \dots 3747 \quad (\text{ukupno 37 puta se ponavlja 37}).$$

10. Nađite cjelobrojna rješenja jednadžbe: $5^x + y^4 = 194482$.

1.5. Metoda nejednakosti

Primjer 9. U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu $a + b + c = abc$.

Rješenje 9. Pošto je jednadžba potpuno simetrična, bez smanjenja općenitosti neka je $a \leq b \leq c$. Tada je $abc = a + b + c \leq 3c$, odnosno $ab \leq 3$ (kako je $c \in \mathbb{N}$, smijemo nejednakost podijeliti s c), pa razlikujemo tri slučaja:

1. $a = 1, b = 1$ (uvrštavanjem te vrijednosti u početnu jednadžbu dobijemo kontradikciju $2 = 0$);
2. $a = 1, b = 2$ (dobivamo $c = 3$);
3. $a = 1, b = 3$ (dobivamo $c = 2$ što je kontradikcija s $b \leq c$).

Dakle, jedino rješenje je $(1, 2, 3)$ i sve permutacije tog skupa. $\square$

Primjer 10. Dokažite da izraz $n^2 + n + 1$, gdje je $n \in \mathbb{N}$, ne može biti kvadrat cijelog broja.

Metoda koju ćemo primijeniti poznata je i kao **smještanje među kvadrate**, tj. pokazujemo da broj ne može biti kvadrat tako da ga smjestimo između dva uzastopna kvadrata.

Rješenje 10. Primijetimo da zbog $n \in \mathbb{N}$ tj. $n > 0$ vrijedi $n^2 + n + 1 > n^2 + 0 + 1 > n^2$. S druge strane, slično zaključujemo i $n^2 + n + 1 < (n^2 + n + 1) + n = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. No kako su n i $n + 1$ su 2 uzastopna prirodna broja, a $n^2 + n + 1$ strogo između njihovih kvadrata, taj broj nikako ne može biti kvadrat nekog prirodnog broj. $\square$

1.5.1 Zadatci za samostalno rješavanje

11. (Općinsko 2010. SŠ4 4.) Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) takvih da vrijedi

$$m^5 + n^2 = 1700$$

12. (Županijsko 2018. SŠ1 2.) Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takve da je:

$$n^2 - 6n = m^2 + m - 10$$

2. Razni zadaci

13. Riješi jednađbu u skupu prirodnih brojeva: $xy - x - y = 0$.

14. (Županijsko 2007. SŠ2 2.) Odredi sva cjelobrojna rješenja jednađbe

$$x^3 + 11^3 = y^3$$

15. Dokažite da za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ jednađba

$$(n^2 + n + 2)x + 2y = 37$$

nema cjelobrojna rješenja.

16. Riješi jednađbu u skupu cijelih brojeva:

$$x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2$$

17. Za koje $n \in \mathbb{N}$ je broj $n^2 + 3n + 5$ kvadrat nekog prirodnog broja?

18. Nađi sve parove prirodnih brojeva (n, m) za koje vrijedi: $(m^2 + n)(m + n^2) = (m + n)^3$.

19. Riješi sljedeću jednađbu u skupu prirodnih brojeva:

$$3(xy + yz + zx) = 4xyz$$

20. Odredite sve proste brojeve p i sve cijele brojeve x takve da vrijedi

$$13p + 4x^2 = 1470$$

21. Pronađi sva cjelobrojna rješenja jednađbe:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy)$$

22. (Državno 2006. SŠ2 1.) Pronađi sve parove (x, y) cijelih brojeva takve da

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2$$

23. Nađite sve $x, y \in \mathbb{Z}$ za koje vrijedi

$$xy + 3y = x^2 + 6x + 12$$

24. Riješite u skupu cijelih brojeva $5x + 2y^2 = 2021$.

25. Riješi u skupu prirodnih brojeva $x^2 - y! = 2001$.

26. (Županijsko 1999. SŠ2 3.) Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$10x^3 + 20y^3 + 8xyz = 1999z^3.$$

27. (Državno 2002. SŠ2 4.) Nađi sve prirodne n tako da sljedeća jednadžba ima 5 rješenja:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

3. Prijedlozi za daljnje rješavanje:

<https://mnm.hr/online-predavanja> - Diofantske jednadžbe

<https://mnm.hr/projekti/predavanja-subotom> - Diofantske jednadžbe

<https://www.skoljka.org/>



Sponsored by GLV & Đurđa

Trenutni i bivši učenici Gimnazije Lucijana Vranjanina
Kontaktirajte nas na glv.forces@gmail.com

