Metamath - Karakteristične točke trokuta

David Mikulčić

17.10.2022

1 Uvod

Dobrodošli na ovotjedni tečaj iz geometrije! Temu koju ćemo obrađivati su karakteristične točke trokuta, za koje vjerujem da svi znate ili se samo trebate prisjetiti.

Preporučio bi svakako prolistati MNM predavanje na ovu temu, klikni ovdje, kako biste bili sigurni kako se definiraju pojedine karakteristične točke te njihova osnovna svojstva.

Osnovni alat koji ćemo koristiti jest angle chasing s kojim ćete se dobro upoznati ovaj tjedan te tetivnost koju također možete pronaći u online predavanjima, ovdje.

Zadnji savjet, koji bi uvijek trebali koristiti je da crtate velike (po mogućnosti lijepe) skice kako biste što bolje uočavali tvrdnje (sukladnosti, sličnosti, tetivnodti , paralelnosti..) kojima se dolazi do rješenja zadatka.

2 Primjeri

1. *Neka su O i H središte opisane kružnice te ortocentar $\triangle ABC$ redom. Dokažite da $\angle ACH = \angle BCO$.*

   Rješenje.

   Neka je $\angle BAC = \alpha$. Tada $\angle ACH = 90^\circ - \alpha$ (iz pravokutnog trokuta sa vrhovima A, C i nožište visine iz vrha C).

   Budući da je O središte opisane kružnice $\triangle ABC$, primjenom teorema o obodnom i središnjem kutu dobivamo $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$. Također, $\triangle BOC$ je jednakokračan budući da je $|OB| = |OC|$ (polumjer opisane kružnice) te je tako $\angle BCO = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$, čime smo dokazali tvrdnju zadatka.

2. *Neka su N_A, N_B i N_C nožišta visina trokuta $\triangle ABC$. Dokaži da je ortocentar trokuta $\triangle ABC$ središte upisane kružnice $\triangle N_A N_B N_C$.*

   Rješenje.

Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$ te standardno $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$.

Budući da su N_A, N_B i N_C nožišta, slijedi da su $\angle HN_AB = \angle HN_CB = 90^\circ$ što znači da je četverokut BN_AHN_C tetivan jer mu je zbroj nasuprotna dva kuta 180°.

Iz tetivnosti sljedeći obodni kutevi su jednaki $\angle N_CN_AH = \angle N_CBH = \angle ABN_B = 90^\circ - \alpha$.

Slično, četverokut CN_BHN_A je tetivan te $\angle N_BN_AH = 90^\circ - \alpha$, što znači da je N_AA simetrala kuta $\angle N_CN_AN_B$.

Analogno možemo dobiti da je N_BB simetrala kuta $\angle N_AN_BN_C$ te N_CC simetrala kuta $\angle N_BN_CN_A$, što dokazuje kako je H središte upisane kružnice trokuta $\triangle N_AN_BN_C$.

3. *Dan je $\triangle ABC$. Neka su I_A, I_B, I_C središta pripisanih kružnica nasuprot redom točaka A, B, C. Neka su dirališta pripisanih kružnica sa stranicama trokuta D_A, D_B, D_C, ponovno redom nasuprot odgovarajućih vrhova. Dokažite da se I_AD_A, I_BD_B, I_CD_C sijeku u jednoj točki (tj. da su konkurentni).*

   Rješenje.

   Označimo standardno kuteve uz vrhove A, B, C sa α, β, γ redom.

   Lako je izračunati kuteve u trokutu $\triangle I_AI_BI_C$: budući da su BI_C te AI_C vanjske simetrale kuteva $\angle ABC$ te $\angle BAC$ redom, $\angle BAI_C = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ te $\angle ABI_C = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, pa slijedi da je $\angle AI_CB = 90^\circ - \gamma$.

   Analogno možemo dobiti $\angle AI_BC = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ i $\angle BI_AC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

   Presjecimo I_AD_A i I_BD_B, neka je to točka X. Želimo dokazati da se X nalazi na pravcu I_CD_C.

   Kako su D_A i D_B dirališta, kutevi $\angle I_AD_AC$ i $\angle I_BD_BC$ su pravi. Sada lako dobivamo $\angle XI_AC = \angle XI_BC = \frac{\gamma}{2}$, što znači da se X nalazi na simetrali $\overline{I_AI_B}$.

   S druge strane, kako je $\angle I_CAI_A = 90^\circ \implies \angle I_CI_AA = \frac{\gamma}{2}$, pa iz leme ($\angle I_BI_AX = \angle I_CI_AA$, zadatak xy.) slijedi da se središte opisane kružnice $\triangle I_AI_BI_C$ nalazi na I_AX. Slično, dobivamo da se to isto središte nalazi i na pravcu I_BX, iz čega zaključujemo da je X središte opisane kružnice trokuta $\triangle I_AI_BI_C$.

   Sada možemo ponovno iskoristiti lemu kako bi dobili $\angle XI_CI_A = \angle CI_CI_B = \frac{\beta}{2}$, a sličnim računom kao sa početka možemo dobiti i $\angle BI_CD_C = \frac{\beta}{2}$, što dokazuje tvrdnju zadatka pošto se I_C, D_C i X nalaze na istom pravcu.

3 Karakteristične točke trokuta - lakši zadaci

1. *Kružnici polumjera $r = 3$ opisan je jednakokračan trokut kojemu je kut pri vrhu $120°$. Izračunajte površinu tog trokuta.*

   Rješenje.

   Označimo vrhove sa A, B, C tako da $\angle BCA = 120°$, I središte upisane kružnice, te P, Q, R dirališta upisane kružnice redom sa stranicama $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$.

   Kako je trokut jednakokračan, visina iz vrha C na $\overline{AB}$ je ujedno i simetrala kuta te slijedi $\angle ICQ = 60°$.

   Sada primjećujemo da je $\triangle ICQ$ polovica jednakostraničnog trokuta $\implies |CI| = 2\sqrt{3}$. Također, $\triangle ARC$ je polovica jednakostraničnog trokuta te iz $|CR| = 2\sqrt{3} + 3 \implies |AR| = 6 + 3\sqrt{3}$, te konačno možemo izračunati površinu trokuta $P_{\triangle ABC} = |CR| \cdot |AR| = 21\sqrt{3} + 36$.

2. *Neka je P presjek simetrale kuta $\angle BCA$ i simetrale stranice $\overline{AB}$, a I središte upisane kružnice $\triangle ABC$. Dokaži da vrijedi $|AP| = |IP| = |BP|$.*

   Rješenje.

   Standardne oznake kuteva uz vrhove A, B i C, α, β i γ redom.

   Budući da je P na simetrali stranice $\overline{AB}$ slijedi $|PA| = |PB|$.

   Budući da je P na simetrali kuta $\angle BCA$ slijedi da je jednako udaljena od pravaca CA i CB, ako označimo okomice na njih sa X i Y redom, to možemo zapisati $|PX| = |PY|$.

   To implicira sljedeću sukladnost, $\triangle PAX \cong \triangle PBY$ iz SSK poučka (kut nasuprot veće stranice je $\angle PXA = \angle PYB = 90°$), iz čega slijedi $\angle APX = \angle BPY$ što implicira i $\angle APB = \angle XPY = 180° - \gamma$, što implicira da su A, B, C i P na istoj kružnici tj. P je na opisanoj kružnici $\triangle ABC$.

   Sada hvatanjem kuteva dobivamo sljedeće, $\angle BAP = \angle BCP = \frac{\gamma}{2}$ zbog obodnih kuteva nad tetivom PB, pa je $\angle IAP = \angle IAB + \angle BAP = \frac{\gamma+\alpha}{2}$.

   S druge strane, $\angle AIP = 180° - \angle CIA = \frac{\gamma+\alpha}{2}$, slijedi da je $\triangle PAI$ jednakokračan te sa tvrdnjom od prije tvrdnju zadatka $|PA| = |PB| = |PI|$.

3. *Dokažite da svaki pravac koji prolazi središtem upisane kružnice trokuta dijeli opseg i površinu tog trokuta u istom omjeru.*

   Rješenje.

   Općinsko 1994 SŠ3 1.zadatak

4. *U šiljastokutnom trokutu ABC točka M je nožište visine iz vrha A, a točka N nožište visine iz vrha B. Ako je $|AN| = |NM|$, dokaži da središte upisane kružnice trokuta ABC leži na visini $\overline{BN}$.*

   Rješenje.

   Budući da $\angle AMB = \angle ANB = 90°$, četverokut $ABMN$ je tetivan.

   Nadalje, kako je $|AN| = |NM|$, a tetive jednake duljine imaju jednake obodne kuteve na kružnicama istog radijusa, tj. ovdje se radi o istoj kružnici $(ABMN)$, što daje $\angle ABN = \angle MBN$.

   Zadnja jednakost povlači da je BN simetrala kuta $\angle ABC$ te tako sadrži središte upisane kružnice.

   (Još bi mogli argumentirati zašto to središte mora biti i na dužini $\overline{BN}$, no očito je da se središte upisane kružnice uvijek nalazi unutar trokuta.)

5. *Dan je trokut $\triangle ABC$. Na pravcu CA je dana točka D takva da vrijedi $|CD| = 3 \cdot |CA|$ (točka A je između točaka C i D), a na pravcu BC točka E ($E \neq B$) takva da je $CE = BC$. Ako je $|BD| = |AE|$, dokaži da je kut $\angle BAC$ pravi.*

   Rješenje.

   Budući da je $\overline{CD}$ težišnica u trokutu $\triangle BDE$, te budući da je $|DA| : |AC| = 2 : 1$ slijedi da je A težište tog istog trokuta.

   Neka je F polovište $\overline{BD}$, tada se točke A, E i F nalaze na istom pravcu (kolinearne su), budući da je $\overline{EF}$ težišnica ponovno koristimo njeno svojstvo $|AE| : |AF| = 2 : 1$ što nam daje $|FD| = |FA| = |FB|$.

   Zadnja tvrdnja povlači da su A, B i D na kružnici sa središtem u F te joj je $\overline{BD}$ promjer, što implicira $\angle BAD = 90°$, što dokazuje tvrdnju iz zadatka $\angle BAC = 90°$.

4 Karakteristične točke trokuta - teži zadaci

6. *Dokažite da je trokut jednakostraničan ako i samo ako je zbroj duljina njegovih visina jednak deveterostrukom polumjeru njegove upisane kružnice.*

   Rješenje.

   Ako stranice označimo sa a, b, c, visine sa v_a, v_b, v_c te polumjer upisane kružnice sa r, iz zadatka dobivamo sljedeću jednakost

$$v_a + v_b + v_c = 9r.$$

(Buduće da se radi o visinama i polumjeru, trebalo bi odmah past na pamet površina trokuta)

Iz formula za površinu trokuta $\frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2} = P$ izrazimo visine te uvrstimo,

$$2P(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 9r$$

pomnožimo obje strane sa $\frac{a+b+c}{2}$ kako bi i na lijevoj dobili površinu, te nakon skraćivanja imamo:

$$(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 9.$$

No ukoliko primijenom A-H nejednakost na desnoj strani dobivamo

$$(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$$

te jednakost vrijedi za $a = b = c$, što je i trebalo dokazati.

7. *Neka su I_A, I_B i I_C središta pripisanih kružnica trokuta $\triangle ABC$ (presjeci dvije vanjske te jedne unutarnje simetrale kuta). Odredi ortocentar trokura $\triangle I_AI_BI_C$.*

   Rješenje.

   Budući da se vanjska i unutarnja simetrala istoga kuta sijeku pod pravim kutem, unutarnje simetrale kuteva $\triangle ABC$ su visine u $\triangle I_AI_BI_C$, te slijedi da je I ortocentar $\triangle I_AI_BI_C$.

8. *U šiljastokutnom trokutu ABC povučene su visine $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$. Kroz ortocentar H je povučen pravac koji siječe stranice trokuta $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama M i N. Neka je M' nožište okomice iz M na $\overline{BB'}$ i N' nožište okomice iz N na $\overline{CC'}$. Dokažite da je $M'C' \parallel N'B'$.*

   Rješenje.

   Četverokut $HC'MM'$ je tetivan budući da su mu dva nasuprotna kuta prava. Tada je

$$\angle HC'M' = \angle HMM' \quad (*)$$

   zbog obodnih kuteva. Nadalje $MM' \parallel B'N$ zbog okomica iz čega slijedi

$$\angle HMM' = \angle HNB' \quad (**)$$

   Slično kao i prije, četverokut $HB'NN'$ je tetivan te

$$\angle HNB' = \angle HN'B' \qquad (***)$$

Konačno, kombiniranjem $(*), (**)$ i $(***)$ dobivamo $\angle HC'M' = \angle HN'B'$ te budući da su C', H i N' kolinearne (na istom pravcu), slijedi da $M'C' \parallel N'B'$.

9. *Točke B i C su dane na polukružnici s promjerom $\overline{AD}$. Preslika točke A preko polovišta P dužine $\overline{BC}$ je točka Q. Dokaži da je točka C ortocentar trokuta $\triangle BQD$.*

   Rješenje.

   Prvo uočimo kako je $ACQB$ paralelogram, što znači $AC \parallel BQ$ i $AB \parallel CQ$.

   Budući da su B i C na kružnici promjera $\overline{AD}$, a obodni kutevi nad promjerom pravi, slijedi $CD \perp AC$ i $AB \perp BD$.

   Iskorištavanjem paralelnosti $AC \parallel BQ$ i okomitosti $CD \perp AC$ slijedi $CD \perp BQ$, što znači da je visina na stranicu $\overline{BQ}$ u trokutu $\triangle BQD$ na pravcu CD.

   Sličnim zaključivanjem, iz paralelnosti $AB \parallel CQ$ i okomitosti $AB \perp BD$ slijedi $CQ \perp BD$, što znači da je visina na stranicu $\overline{BD}$ u trokutu $\triangle BQD$ na pravcu CQ.

   Slijedi da je točka C ortocentar trokuta $\triangle BQD$.

10. *Dan je trokut s ortocentrom H i središtem opisane kružnice O. Ako je mjera jednog kuta trokuta $60°$, dokaži da je simetrala tog kuta okomita na pravac OH.*

    Rješenje.

    Državno 2012. Zadatak A-4.3.

5 Karakteristične točke trokuta - još teži zadaci

11. *Dan je $\triangle ABC$ sa ortocentrom H te središtem opisane kružnice O. Neka su točke D i M redom polovišta dužina $\overline{AH}$ i $\overline{BC}$. Dokaži da je četverokut $DAMO$ paralelogram.*

    Rješenje.

    Iz poznate leme $|AH| = 2|OM|$ (tj. zadatka MNM predavanja Zadatak 4.) te činjenice da $AD \parallel OM$ slijedi da je $DAMO$ paralelogram.

12. *Neka je O središte opisane kružnice, a T težište trokuta $\triangle ABC$, koji nije jednakostraničan. Dokaži da je OT okomita na težišnicu $\overline{CC_1}$ ako i samo ako za stranice trokuta vrijedi $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$.*

Rješenje.

Standardne oznake: $a = BC, b = AC, c = AB, \gamma = \angle BCA$.

Pretpostavimo $a^2+b^2 = 2c^2$ te korištenjem (poznate) formule za težišnicu:

$$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2},$$

dobivamo da

$$t_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Još iskoristimo kosinusov poučak:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

kako bismo dobili relaciju

$$(\frac{2}{\sqrt{3}}t_c)^2 = 2ab\cos\gamma,$$

te nakon sređivanja imamo

$$a^2 + b^2 = 2c^2 \iff ab\cos\gamma = \frac{2}{3}t_c^2 \quad (*)$$

Sada pretpostavimo $CC_1 \perp OT$. Neka je H ortocentar, poznat je Eulerov pravac (O, H, T leže na istom pravcu) te ukoliko označimo nožišta visina trokuta sa D, E, F redom iz vrhova A, B, C, možemo primjetiti da je TC_1FH tetivan (nasuprotni kutevi su pravi) te isto tako $AFHE$.

Pogledajmo potenciju točke C na (TC_1FH) :

$$CT \cdot CC_1 = CH \cdot CF \quad (1).$$

Pogledajmo potenciju točke C na $(AFHE)$:

$$CH \cdot CF = CE \cdot CA \quad (2).$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$CT \cdot CC_1 = CE \cdot CA,$$

sada možemo lijevu stranu izraziti preko t_c (budući da je $CT : TC_1 = 2 : 1$), a na desnoj iskoristiti kosinus kuta γ u $\triangle CBE$, dobivamo:

$$\frac{2}{3}t_c^2 = ab\cos\gamma,$$

te budući da vrijedi i obratan smjer, vrijedi

$$CC_1 \perp OT \iff \frac{2}{3}t_c^2 = ab\cos\gamma \quad (**)$$

Napokon, iz $(*)$ i $(**)$ zaključujemo

$$CC_1 \perp OT \iff a^2 + b^2 = 2c^2.$$