

U traganju svemirom za izgubljenim formulama

1. Teorijski uvod

U ovom predavanju otkrit ćete kako pronaći "formule" po kojim se zbrajaju razni nizovi koji u nazivniku (a možda i brojniku) ovise o svojem indeksu (položaju u nizu).

Definicija 1.1: Teleskopiranje

Teleskopiranje je matematička metoda rješavanja algebarskih zadataka kojom se složeni razlomci rastavljaju na jednostavnije razlomke (koji se tada u većini slučajeva skrate).

Lema 1.2: Rastav na linearne komponente

Svaki složeni razlomak može se rastaviti na linearne komponente.

$$\frac{1}{xy} = \frac{A}{x} + \frac{B}{y} \quad (\text{za neke } A, B \in \mathbb{R})$$

Primijetimo da lemu možemo prošiti i na razlomke s više komponenata u nazivniku (pa onda svaku možemo rastaviti). Također, nije nužno da je broj 1 u brojniku (onda možemo obje strane pomnožiti s nekim izrazom).

Primjer 1. Odredi zbroj: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

Rješenje 1. Zapišimo neki općeniti član tog niza: $\frac{1}{n \cdot (n+1)}$. Taj razlomak želimo rastaviti na neke razlomke $\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$. Rješavanjem sustava jednadžbi za konkretne vrijednosti n (npr. $n = 1$ i $n = 2$) dobivamo $A = 1$, $B = -1$. Sada samo trebamo izračunati zbroj:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

□

Primjer 2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > 10$. Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\frac{2^2 - 1}{2^2 + 3 \cdot 2 + 2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2 + 3 \cdot 3 + 2} \cdot \dots \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n + 2} = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2 + 3k + 2}$$

Rješenje 2. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{k^2 - 1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{(k-1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k-1}{k+2}$$

Sada je naš umnožak jednak

$$\frac{2-1}{2+2} \cdot \frac{3-1}{3+2} \cdot \frac{4-1}{4+2} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n+2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n+2}$$

Primijetimo da će se pokratiti svi brojnici i nazivnici koji su veći od 3 i manji od n , tako da ostaje

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}$$

□

⚠ Oprez

Uvjet $n > 10$ nam je trebao da ne bismo imali preklapanja brojeva koji se nisu pokratili. Na primjer, za $n = 3$ ne postoje brojnici niti nazivnici koji su veći od 3 i manji od n , pa treba zasebno argumentirati takav slučaj.

2. Zadaci

2.1. Lakši zadaci

1. Odredi zbroj:

$$\sum_{n=1}^{2020} \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = ?$$

2. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{1}{n(n+x)} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

3. Odredi zbroj:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{n^2 - 1} + \dots + \frac{1}{2022^2 - 1} = ?$$

4. Odredi umnožak:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

5. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

6. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$$

7. Odredi:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021 \cdot 2022} = ?$$

2.2. Teži zadaci

8. Odredi:

$$\frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{4} + 4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{24\sqrt{25} + 25\sqrt{24}} = ?$$

9. Izračunaj:

$$\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

10. (HJMO 2017.) Izračunaj zbroj:

$$\frac{1^2 + 2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \cdot 3} + \frac{3^2 + 4^2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{99^2 + 100^2}{99 \cdot 100}$$

11. Neka je niz $(F_n)_{n \geq 0}$ Fibonaccijevi brojevi, odnosno $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ za svaki prirodan broj k . Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_2 F_4} + \dots + \frac{1}{F_{n-1} F_{n+1}} < 1$$

12. Izračunaj vrijednost:

$$\frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)}$$

3. Prijedlozi za daljnje rješavanje:

<https://mnm.hr/online-predavanja> - Algebarski izrazi

<https://mnm.hr/projekti/predavanja-subotom> - Teleskopiranje