Dodatna 19. 9. 2022.

Djelitelj i višekratnik

1. Teorijski uvod

Zadatci koji koriste najveći zajednički djelitelj ili najmanji zajednički višekratnik su vrlo česti u natjecateljskom programiranju, pa je cilj ovog predavanja upoznati vas sa svim važnim tvrdnjama o njima!

Definicija 1.1: Najveći zajednički djelitelj

Najveći zajednički djelitelj ili *mjera* dva prirodna broja a i b je broj d takav da je $d \mid a$ i $d \mid b$, te je d najveći prirodni broj s tim svojstvom. Pišemo $D(a, b) = M(a, b) = \gcd(a, b) = d$.

Definicija 1.2: Najmanji zajednički višekratnik

Najmanji zajednički višekratnik dva prirodna broja a i b je broj v takav da je $a \mid v$ i $b \mid v$, te je v najmanji prirodni broj s tim svojstvom. Pišemo $V(a, b) = \operatorname{lcm}(a, b) = v$.

Primjer 1. Nađi najveći zajednički djelitelj brojeva 120 i 72.

Rješenje 1. Jedno moguće rješenje je "povući crtu" i dijeliti brojeve sve dok ne dobijemo relativno proste brojeve. Najveći zajednički djelitelj je umnožak brojeva s desne strane.
Na primjer:

$$\begin{array}{cc|c} 120 & 72 & 2 \\ 60 & 36 & 2 \\ 30 & 18 & 2 \\ 15 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & \end{array}$$

Dakle, $D(120, 72) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$. Slično, najmanji zajednički višekratnik možemo dobiti tako da pomnožimo brojeve s desne strane s konačnim parom relativno prostih brojeva. Dakle, $V(120, 72) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$. $\square$

Lema 1.3: Određivanje preko raspisa na proste faktore

Pretpostavimo da smo rastavili brojeve a i b na proste faktore:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots$$

$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \dots$$

Pri čemu su $p_1, p_2 \dots$ različiti prosti brojevi, a $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ i β_1, β_2 neki eksponenti iz $\mathbb{N}_0$.

Tada je

$$D(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot p_3^{\min(\alpha_3,\beta_3)} \dots$$
$$V(a,b) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot p_3^{\max(\alpha_3,\beta_3)} \dots$$

Alternativno rješenje 1. Pogledajmo raspis brojeva 120 i 72.

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0$$

Slijedi:

$$D(120,72) = 2^{\min(3,3)} \cdot 3^{\min(1,2)} \cdot 5^{\min(1,0)} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 24$$
$$V(120,72) = 2^{\max(3,3)} \cdot 3^{\max(1,2)} \cdot 5^{\max(1,0)} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$$

Lema 1.4: Euklidov algoritam

Neka su a i b iz $\mathbb{Z}$ i nisu oboje nula. Tada vrijedi:

$$D(a,b) = D(b,a) = D(b, b-a) = D(a, a-b)$$

Alternativno rješenje 1. Rješenje smo mogli dobiti i Euklidovim algoritmom: $D(120,72) = D(72,48) = D(48,24) = D(24,24) = 24$.

Teorem 1.5

Neka su a i b iz $\mathbb{N}$. Tada vrijedi:

$$a \cdot b = D(a,b) \cdot V(a,b)$$

Po teoremu, nakon što dobijemo da je $D(120,72) = 24$, možemo lagano dobiti i

$$V(120,72) = \frac{120 \cdot 72}{D(120,72)} = \frac{8640}{24} = 360.$$

2. Zadaci

2.1. Lagani zadaci

1. (MAT liga 2017./18. 6. raz) Koliko prirodnih brojeva x zadovoljava jednakost $D(x,100) = x$?

2. (MAT liga 2017./18. 6. raz) Koliko prirodnih brojeva x zadovoljava jednakost $V(x,100) = 100$?

3. (MAT liga 2017./18. 5. raz) Umnožak dvaju prirodnih brojeva je 525, a njihov je najveći zajednički djelitelj 5. Nijedan od tih brojeva nije djeljiv drugim brojem. Koliki im je zbroj?

4. (MAT liga 2019./20. 6. raz.) Koliko postoji različitih brojeva a koji nisu prosti i za koje vrijedi $V(a,60) = 60$?

5. (MAT liga 2020./21. 6. raz) Ako je $D(a, b, c) = 4$ i $V(a, b, c) = 240$, koliki je najmanji mogući umnožak brojeva a, b i c?

6. Pokaži da je razlomak $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ neskrativ za sve $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Teži zadaci

7. Odredi

$$\sum_{n=1}^{2022} D(n, 2022)$$

8. (Žup. 6. razred 2022.) Neka su a, b i c prirodni brojevi takvi da je $a < b$ i vrijedi $D(a, b) = 4$, $D(a, b, c) = 2$ te $V(a, b, c) = 400$. Odredi sve trojke (a, b, c) prirodnih brojeva za koje vrijede zadani uvjeti.

9. Dokaži $a^2 + b^2 \leq D(a, b)^2 + V(a, b)^2$. Koji su slučajevi jednakosti?

3. Prijedlozi za daljnje rješavanje:

https://mnm.hr/online-predavanja - prvo predavanje (Djeljivost)
https://www.skoljka.org/ - VVV - Teorija Brojeva

GLVforces

Sponsored by GLV & Đurđa

Trenutni i bivši učenici Gimnazije Lucijana Vranjanina
Kontaktirajte nas na glv.forces@gmail.com