Skupovi i Dirichletov princip - rješenja

Tomislav Kralj

Zadatak 1. *Neka su A, B i C skupovi. Dokažite da $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$ ako i samo ako $A \cup B \subseteq C$.*

Rješenje. Uzmimo proizvoljan element $x \in A \cup B$. Tada vrijedi $x \in A$ ili $x \in B$. Kako je $A \cup B \subseteq C$, vrijedi $x \in C$. Stoga zakljuljučujemo $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$. S druge pak strane uzmimo x takav da $x \in A \cup B$. Ako je $x \in A$, zbog $A \subseteq C$ vrijedi $x \in C$. Ako je $x \in B$, analogno dobijamo $x \in C$. Za proizvoljni $x \in A \cup B$ uvijek vrijedi $x \in C$. Stoga zaključujemo $A \cup B \subseteq C$. □

Zadatak 2. *Neka su A i B skupovi. Dokažite da vrijedi $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.*

Rješenje. Neka je $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ proizvoljan. Slijedi da je $x \in A \backslash B$ ili $x \in B \backslash A$. Ako je $x \in A \backslash B$, imamo da je $x \in A$ i $x \notin B$. Dakle, $x \in A \cup B$, a $x \notin A \cap B$. Slijedi da je $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Ako je $x \in B \backslash A$, imamo da je $x \in B$ i $x \notin A$. Dakle, $x \in A \cup B$, a $x \notin A \cap B$. Slijedi da je $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Dokazali smo da je $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) \subseteq (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

S druge strane, neka je $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ proizvoljan. Slijedi da je $x \in A \cup B$, a $x \notin A \cap B$. Pretpostavimo da je $x \in A$. Da je $x \in B$, vrijedilo bi $x \in A \cap B$ što je kontradikcija. Dakle, $x \notin B$ pa je $x \in A \backslash B$. Zato vrijedi i $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Sada pretpostavimo da je $x \in B$. Da je $x \in A$, vrijedilo bi $x \in A \cap B$ što je kontradikcija. Dakle, $x \notin A$ pa je $x \in B \backslash A$. Zato vrijedi i $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Dokazali smo da je $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) \supseteq (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Kako smo pokazali obje inkluzije, vrijedi jednakost skupova. □

Zadatak 3. *Kad imamo uniju (odnosno presjek) više skupova, možemo izostaviti zagrade.*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) =: A \cup B \cup C$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) =: A \cap B \cap C.$$

To se svojstvo zove asocijativnost. Za razliku od unije i presjeka, skupovna razlika nije asocijativna. Nadalje, presjek i unija su komutativne operacije, dok skupovna razlika nije, tj. vrijedi

$$A \cup B = B \cup A \text{ i } A \cap B = B \cap A,$$

ali $A \backslash B$ općenito nije jednako $B \backslash A$. Ispitajte vrijedi li $(A \backslash B) \cup C = (A \cup C) \backslash B$. Sve svoje tvrdnje dokažite.

Rješenje. Za dokazati da ne vrijedi jednakost dovoljno je pronaci primjer za koji jednakost ne vrijedi. Neka su

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{2, 3, 4\}$$
$$C = \{4, 5, 6\}.$$

Za ovako definirane skupove, lijeva strana jednakosti je

$$(A \backslash B) \cup C = \{1\} \cup C = \{1, 4, 5, 6\},$$

dok je desna strana jednakosti je jednaka

$$(A \cup C) \backslash B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \backslash B = \{1, 5, 6\},$$

pa zaključujemo da jednakost ne vrijedi općenito. □

Zadatak 4. *Neka su A i B skupovi. Simetrična razlika skupova A i B je skup koji označavamo s $A \Delta B$, a definiran je s*

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ skupovi. Dokažite da se skup $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$ sastoji od onih elemenata koji pripadaju A_i za neparno mnogo indeksa i.

Rješenje. Uzmimo neki element x takav da je $x \in A_j$ za $j \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, pri čemu smo indekse u skupova u kojima se pojavljuje x poredali u uzlaznom poretku ($a_1 < a_2 < \ldots < a_k$). Uočimo sljedeće: kako je A_{a_1} prvi skup u kojem se pojavljuje x, po definiciji simetrične razlike vrijedi

$$x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \Delta A_{a_1}.$$

Nadalje, kako je A_{a_2} drugi skup u kojem se pojavljuje x, vrijedi

$$x \notin A_1 \triangle A_2 \Delta \ldots \Delta A_{a_2}.$$

Sada je jasno da daljnjom iteracijom dobivamo

$$x \in A_1 \triangle A_2 \Delta \ldots \Delta A_{a_3},$$

i tako dalje. Na koncu, zaključujemo da

$$x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{a_k} \iff k \text{ neparan},$$

što na koncu daje

$$x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n \iff n \text{ neparan}.$$

□

Zadatak 5. *U učionici ima 15 računala, a u razredu ima 35 učenika. Dokažite da postoji računalo za kojim će sjediti barem troje učenika.*

Rješenje. Prema Dirichletovom principu, vidimo da imamo 15 *kutija* (računala), a $2 \cdot 15 + 5$ učenika. To znači da će bar na jednom računalu broj učenika biti strogo veći od 2 , to jest barem 3. □

Zadatak 6. *Dokaži da u $n+1$ brojeva uvijek postoje dva čija je razlika djeljiva s n.*

Rješenje. Ostataka pri dijeljenju s n ima tocno n, a kako imamo $n+1$ brojeva sigurno ce postojati 2 koji daju isti ostatak pri dijeljenju s n. Neka su ta 2 broja s istim ostatkom n_1 i n_2. Za njih vrijedi

$$\begin{aligned} n_1 &\equiv m \pmod{n} \\ n_2 &\equiv m \pmod{n}, \end{aligned}$$

pa oduzimanjem dobivamo

$$n_1 - n_2 \equiv m - m \equiv 0 \pmod{n}$$

što dokazuje tvrdnju. □

Zadatak 7. *Unutar kvadrata duljine stranice 1 nalazi se pet obojanih točaka. Dokažite da postoje dvije od tih pet točaka takve da je udaljenost među njima manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Rješenje. Podijelimo kvadrat na 4 manja kvadrata simetralama stranica. Tada je u svakom tom kvadratu dijagonala duga $\frac{\sqrt{2}}{2}$, što je ujedno i najveća moguća udaljenost bilo koje dvije točke unutar jednog od tih kvadrata. Kako su 4 kvadrata, a 5 točaka, po Dirichletovom principu zaključujemo da se barem dvije točke moraju nalaziti unutar istog kvadrata, pa je njihova udaljenost manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

Zadatak 8. *Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokažite da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.*

Rješenje. Primjetimo da su svi prirodni brojevi manji od 840 ili prosti ili imaju faktor $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$. U skupu faktora je 9 prostih brojeva. Kako su svi od promatranih 10 brojeva manji od 840, prema Dirichletovom principu postoje barem 2 s istim prostim faktorom, odnosno postoje 2 broja $a, b < 840$ za koje vrijedi $M(a, b) > 1$. □

Zadatak 9. *Neka je $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ (proizvoljan) niz skupova. Definiramo sljedeća dva skupa:*

$$\limsup A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n \geq N} A_n \right)$$

te

$$\liminf A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n \geq N} A_n \right)$$

Dokažite sljedeće dvije tvrdnje:

(a) *Skup* $\limsup A_n$ *sadrži one i samo one* x*-eve koji se nalaze u beskonačno mnogo skupova* A_n*.*

(b) *Skup* $\liminf A_n$ *sadrži one i samo one* x*-eve koji se nalaze u svim skupovima* A_n*, osim možda konačno mnogo njih.*

Rješenje. Neka je $x \notin \limsup A_n$. Zaključujemo da postoji neki $N \in \mathbb{N}$ takav da

$$x \notin \bigcup_{n \geq N} A_n,$$

što u biti znači

$$x \notin A_i, \ \forall i \in \{N, N+1, N+2, \ldots\}.$$

Drugim riječima, x može biti samo u onim skupovima A_i za koje je $i < N$, a takvih ima $N - 1$, tj. konačno mnogo. Obratno, pretpostavimo sada da je $x \in A_i$ za beskonačno mnogo skupova A_i. Onda za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $i \geq N$ takav da je $x \in A_i$. Dakle, za svaki N imamo

$$x \in \bigcup_{n \geq N} A_n$$

Iz toga direktno slijedi

$$x \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n \geq N} A_n \right).$$

Time smo pokazali (a) dio.

Pretpostavimo da je $x \in \liminf A_n$. Slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x \in \bigcap_{n \geq N} A_n$$

Dakle, $x \in A_i$, $\forall i \geq N$, pa $x \notin A_i$ ako i samo ako je $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$, a takvih je očito konačno mnogo. Sada pretpostavimo da je $x \notin A_i$ za beskonačno mnogo skupova A_i. Onda za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji neki $n \geq N$ takav da $x \notin A_n$. Posebno, imamo

$$x \notin \bigcap_{n \geq N} A_n, \ \forall N \in \mathbb{N},$$

što na koncu daje

$$x \notin \bigcup_{N=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n \geq N} A_n \right).$$

Time smo pokazali i (b) dio. $\square$

Zadatak 10. *Gladni (i sve više okrugli) tuljan Tuljko svaki dan pojede bar 1 kilogram ribe (i broj pojedenih kilograma u danu uvijek je prirodan). Tijekom 365 dana pojeo je čak 700 kilograma ribe. Dokažite da postoji niz od nekoliko uzastopnih dana u kojima je Tuljko ukupno pojeo 29 kilograma ribe.*

Rješenje. Promatrajmo brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ koji predstavljaju ukupan broj pojedenih kilograma ribe zaključno s odgovarajućim danom. Kako svaki dan Tuljko pojede barem 1 kilogram ribe, vrijedi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{365}$. Da bismo dokazali traženu tvrdnju, dovoljno je dokazati da je jedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ jednak jednom od brojeva $a_1 + 29, a_2 + 29, \ldots, a_{365} + 29$. Naime, tada za neke $i < j$ vrijedi

$$a_j = a_i + 29,$$

pa je od $i$tog to $j$tog dana pojedeno točno 29 kilgrama ribe. Da dokažemo da je jedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ jednak jednom od brojeva $a_1 + 29, a_2 + 29, \ldots, a_{365} + 29$, koristimo Dirichletov princip. Naime, imamo $2 \cdot 365 = 730$ brojeva, a svi su oni između 1 i $a_{365} + 29 = 729$, pa moraju biti dva koja su jednaka. $\square$

Zadatak 11. *Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji njegov višekratnik kojem su jedine znamenke nule i jedinice.*

Rješenje. Promatramo brojeve oblika

$$a_l = \sum_{k=0}^{l} 10^k,$$

te ako gledamo razliku između dva takava broja, ona je broj koji se sastoji samo od nula i jedinica. Promatrajmo niz (a_n)

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots, \sum_{k=0}^{n} 10^k$$

u kojem ima $n + 1$ brojeva. Postoji samo n ostataka pri dijeljenju s n, što znaci da u nizu $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ postoje a_i i a_j, $i < j$ koji daju isti ostatak pri djelljenju s n. Njihova razlika $a_j - a_i$, prema je ta razlika koja se sastoji samo od nula i jedinica te vrijedi $a_j - a_i \equiv 0 (\text{mod } n)$. $\square$