Princip ekstrema

MetaMath - 4. tjedan

Nika Utrobičić

1 Uvod

Dobar dan i dobro nam došli na ovotjedni Metamath tečaj - ovaj put iz kombinatorike! Tema kojom se bavimo ovaj tjedan je Princip ekstrema - naučit ćemo da promatranjem toga što se događa s objektom koji je "naj" često možemo riješiti zadatak. Osnovnu ideju ćemo demonstrirati na sljedećoj tvrdnji:

Parnih brojeva ima beskonačno mnogo.

Važno je napomenuti da se ne može baš svaki zadatak uklopiti u sljedeći algoritam - promotriti objekt koji je po nekom svojstvu "naj" svejedno može biti korisno, stoga se ne ustručavajte pokušati i nešto drugačije. Krenimo na metodu:

1. Pretpostavimo suprotno: Princip ekstrema najčešće koristimo kao metodu kojom dokazujemo da nešto ne vrijedi. Dakle, parnih brojeva ima konačno mnogo.

2. Izdvojimo ekstrem: Promotrimo objekt koji je po nečemu "naj": najveći, najmanji, najudaljeniji, najslabiji... U težim zadacima zna ne biti očito po čemu to mjerimo elemente, stoga se nemojte ograničiti samo na manji/veći. U našem primjeru izdvojimo najveći parni broj p_m.

3. Nađimo ekstremnijeg: Srž principa ekstrema je pronaći objekt koji je više "naj" čak i od samog ekstrema: veći od najvećeg, manji od najmanjeg, dalji od najdaljeg, slabiji od najslabijeg... Takav objekt naravno ne postoji pa ukoliko ga pronađemo, dolazimo do kontradikcije. Što se tiče našeg primjera, broj $p_m + 2$ je paran i veći od najvećeg parnog broja p_k, pa smo došli do kontradikcije.

U ostatku teksta detaljno ćemo prokomentirati klasične primjere zadataka koji se mogu riješiti primjenom principa ekstrema, a više primjera i zadataka možete potražiti u MNM predavanju Princip ekstrema i knjizi Problem Solving Strategies Arthura Engela, po kojima je pisano predavanje.

2 Primjeri

1. PRIMJER 100 realnih brojeva poredano je u krug na način da se između svaka 2 broja a i b nalazi broj $\frac{a+b}{2}$. Dokažite da su svi brojevi u krugu jednaki.

RJEŠENJE Iskušajmo našu metodu.
1. Pretpostavimo suprotno: Postoji konfiguracija takva da zadovoljava uvjet i svi brojevi u krugu nisu jednaki.

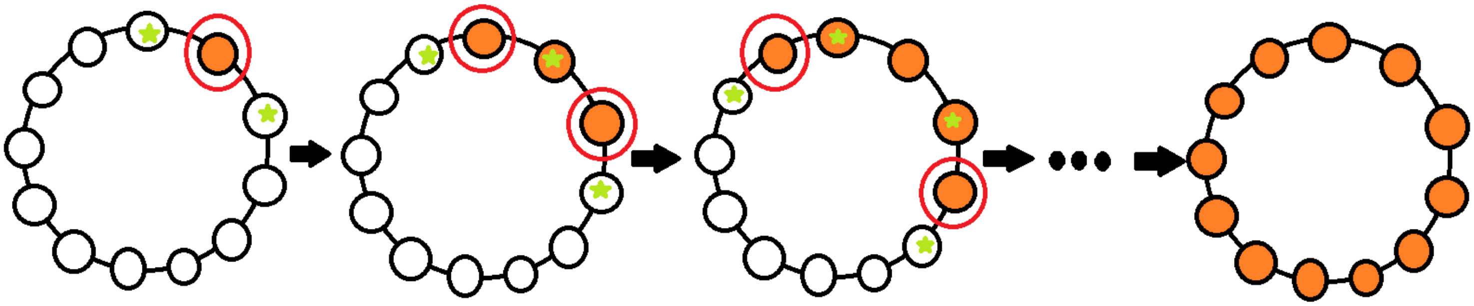
2. Izdvojimo ekstrem: Označimo najveći broj u tom krugu s x
3. Nađimo ekstremnijeg: x je aritmetička sredina 2 broja u krugu koja su mu susjedna, a i b, takvi da je ab.
Ako je $a < b$, vrijedi

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} = x < \frac{b+b}{2} = b$$

dakle u tom slučaju je b veći od najvećeg broja u krugu, što je **kontradikcija** s izborom broja x.

Zaključujemo da mora vrijediti $a = b$, pa je i $x = \frac{a+b}{2} = a = b$, drugim riječima oba susjeda najvećeg broja u krugu su također jednaka najvećem broju u krugu.

Sada isto možemo zaključiti i za njih, zatim za njihove susjede te susjede njihovih susjeda.

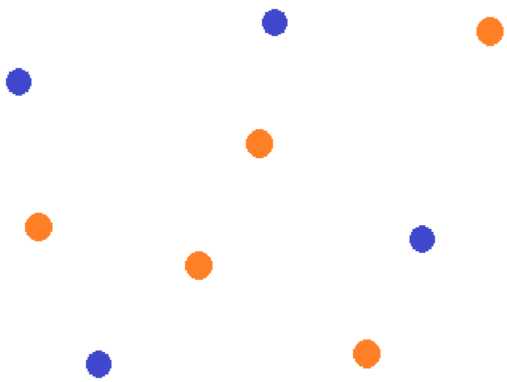


Ponavljanjem tog postupka dobijemo da su svi brojevi u krugu jednaki x, što je u kontradikciji s odabirom kruga. Dakle, svi brojevi u krugu moraju biti jednaki - riješili smo zadatak!

2. PRIMJER U ravnini se nalazi konačno crvenih i plavih točaka. Na svakoj dužini čiji su krajevi crvene točke postoji plava točka, a na svakoj dužini čiji su krajevi plave točke, postoji crvena točka. Dokažite da sve točke leže na istom pravcu.

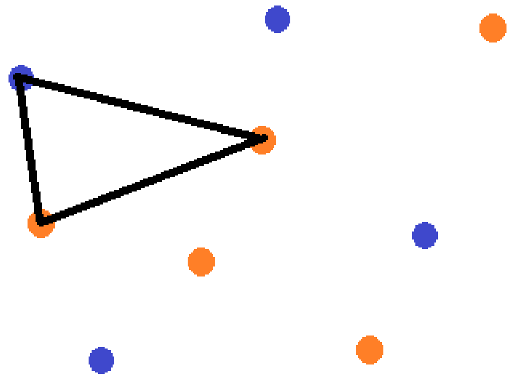
RJEŠENJE Zadatak rješavamo metodom kontradikcije.

1. korak Pretpostavimo da nije istina da su u svakoj konfiguraciji koja zadovoljava uvjet sve točke na istom pravcu. To znači da postoji neka konfiguracija točaka koja zadovoljava traženi uvjet, a da sve točke ne leže na istom pravcu. Promotrimo jednu takvu konfiguraciju*.

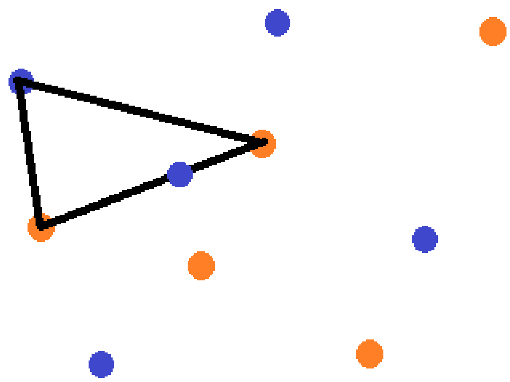


**Primijetite da konfiguracija sa slike ne zadovoljava uvjet. Neka vas to ne zbunjuje - mi dokazujemo da i ne postoji konfiguracija nekolinearnih točaka koja ga zadovoljava. Prema konfiguraciji sa slike ćemo se ponašati kao da ga zadovoljava i koristeći to dokazati da na njoj mora vrijediti nešto očito pogrešno. Više o metodi kontradikcije možete saznati na sljedećem linku.*

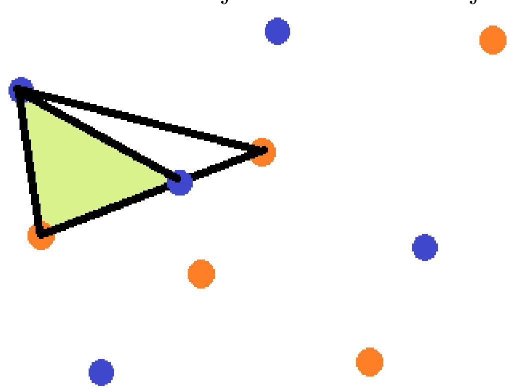
2. korak Kako sve točke ne leže na istom pravcu, neke od točaka sigurno **tvore trokut**. Promotrimo sve trokute koje tvore točke iz konfiguracije i promotrimo onaj **najmanje površine**.



3. korak Taj trokut ima 3 vrha, a točke su obojene u 2 boje, pa po Dirichletovom principu znamo da su neka 2 vrha sigurno iste boje. Po uvjetu zadatka, na stranici trokuta čiji su vrhovi iste boje nalazi se točka suprotne boje.



4. korak Trokut koji čine ta točka i bilo koja 2 vrha originalnog trokuta manje je površine nego originalni trokut, pa smo došli do kontradikcije i dokazali da tvrdnja ne vrijedi.



3. PRIMJER Pronađite sve prirodne brojeve x, y, z i w koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2)$$

RJEŠENJE Nakon što igrajući se i uvrštavajući razne vrijednosti ne uspijemo naći $x, y, z, w \in N$ koji zadovoljavaju jednadžbu, naslutimo da rješenja nema. I ovaj zadatak rješavamo metodom kontradikcije - pretpostavimo da jednadžba ima barem jedno rješenje

1. korak: Od svih rješenja, promotrimo one x, y, z i w za koje je izraz $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ najmanji.

2. korak: Kako je desna strana jednadžbe djeljiva s 3, mora biti i lijeva. Dakle, izraz x^2+y^2 je djeljiv sa 3. Što to govori o x i y?

Koliki uopće može biti ostatak pri dijeljenju potpunog kvadrata s tri? Prisjetimo li se 2. tjedna Metamath tečaja, nije teško zaključiti da je odgovor 0 ili 1.

Naime, prirodni broj a može davati ostatak 0, 1 ili 2 pri dijeljenju s 3:

- Ako a daje ostatak 0, a^2 daje ostatak $0 \cdot 0 = 0$.
- Ako a daje ostatak 1, a^2 daje ostatak $1 \cdot 1 = 1$.
- Ako a daje ostatak 2, a^2 daje isti ostatak kao i $2 \cdot 2 = 4$ pri dijeljenju sa 3, dakle daje ostatak 1.

Vidimo da x^2 i y^2 daju ostatke 0 i 1 pri dijeljenju sa 3. Opet promatramo slučajeve:

- Ako x^2 i y^2 daju ostatak 0 pri dijeljenju sa 3, x^2+y^2 daje ostatak $0+0=0$.
- Ako x^2 daje ostatak 1, a y^2 ostatak 0 pri dijeljenju sa 3 ili obratno, x^2+y^2 daje ostatak $1+0=0+1=1$.
- Ako x^2 i y^2 daju ostatak 1 pri dijeljenju sa 3, x^2+y^2 daje ostatak $1+1=2$.

Dakle, x^2+y^2 može biti djeljivo s 3 samo onda kad su i x^2 i y^2 djeljivi s 3, a to se može dogoditi samo kad su x i y djeljivi s 3.

Ukoliko su vam ovakvi zaključci još uvijek pomalo strani, više zadataka za vježbu možete pronaći u MNM predavanjima Djeljivosti i Kongruencije.

Sada znamo da postoje $x_0, y_0 \in N$ takvi da $x = 3x_0$ i $y = 3y_0$, pa jednadžba postaje

$$(3x_0)^2 + (3y_0)^2 = 3(z^2+w^2)$$

3. korak: Sređivanjem gornjeg izraza dobijemo jednadžbu

$$3(x_0^2+y_0^2) = z^2+w^2$$

koju možemo napisati i kao

$$z^2+w^2 = 3(x_0^2+y_0^2)$$

Primijetimo da to znači da su brojevi z, w, x_0 i y_0 rješenja početne jednadžbe. Kako su x_0 i y_0 trećine od x i y redom, znamo da vrijedi $x_0 < x$ i $y_0 < y$. Stoga

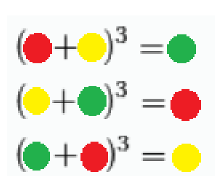
$$z^2+w^2+x_0^2+y_0^2 < x^2+y^2+z^2+w^2$$

pa x, y, z i w ne mogu biti takvi da je $x^2+y^2+z^2+w^2$ najmanji - došli smo do kontradikcije.

4. PRIMJER Riješite sustav u skupu R:

$$(y+z)^3 = x$$
$$(z+x)^3 = y$$
$$(x+y)^3 = z$$

RJEŠENJE Ključno je primijetiti da je zadani sustav **simetričan**, to jest da međusobnom zamjenom imena varijabli dobijamo iste jednadžbe.



Drugim riječima, kako god uvrstimo varijable x, y, z kao boje crvena, žuta i zelena, dobijemo isti sustav. Ukoliko se prvi put susrećete s ovim pojmom, to zaista i napravite!

Zbog simetričnosti sustava bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je x **najveći** od ta 3 realna broja. Tada xy, stoga raspisujemo

$$\begin{aligned} & xy \\ & (y+z)^3 (z+x)^3 \qquad \text{Zašto smijemo uzeti treći korijen obje strane?} \\ & y+zz+x \\ & yx \end{aligned}$$

Dakle vrijedi xy i yx, stoga $x = y$. Potpuno analogno dobijemo i $x = z$, stoga mora biti $x = y = z$.

Uvrštavanjem $x = y = z$ jednadžba postaje

$$\begin{aligned} (x+x)^3 &= x \\ (2x)^3 &= x \\ 8x^3 &= x \\ 8x^3 - x &= 0 \\ x(8x^2 - 1) &= 0 \qquad \text{Primijetimo razliku kvadrata} \\ x(2\sqrt{2}x - 1)(2\sqrt{2}x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

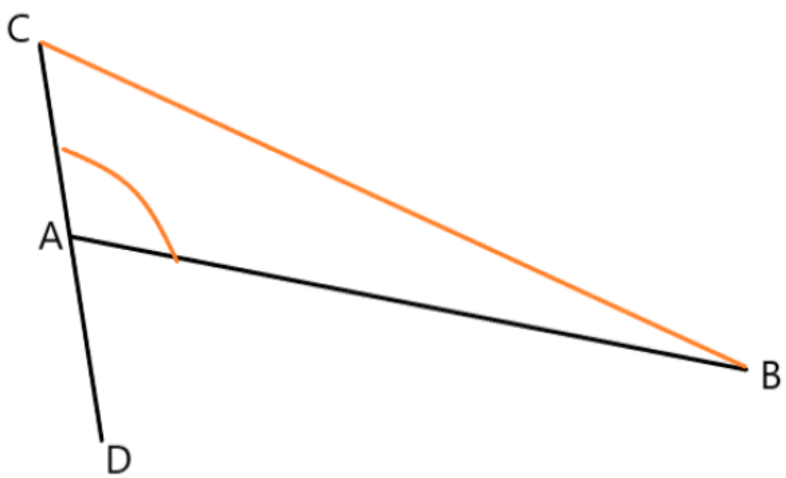
Sada lako očitamo rješenja: $(0, 0, 0)$, $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ i $\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

3 Osnovni lanac

1. U ravnini se nalazi skup točaka takav da je svaka točka polovište neke dužine čije su krajnje točke također iz tog skupa. Dokažite da je taj skup točaka beskonačan.

Rješenje Pretpostavimo da je takav skup konačan. Tada sigurno možemo odabrati 2 točke takve da je dužina čijoj su rubne točke najdulja moguća. Zovimo ih A i B.

Znamo da je A polovište neke dužine CD čije su rubne točke u skupu.



Kako je $\angle CAB + \angle BAD = 180°$, jedan od trokuta $\triangle CAB$ i $\triangle BAD$ je ili pravokutan ili tupokutan. Bez smanjenja općenitosti neka je to $\triangle CAB$. Tada je stranica nasuprot kuta koji je $\geq 90°$, BC, dulja od AB, pa smo došli do kontradikcije.

Drugo rješenje Mnogi su polaznici ovaj zadatak riješili korištenjem analitičke geometrije. U nastavku možete pročitati jedno takvo rješenje korisnika vaza:

Postavimo točke u Kartezijevu ravninu. Pretpostavimo da je zadani skup konačan. Tada postoji točka X s najvećom x koordinatom koja među takvima ima najveću y koordinatu. Tada razlikujemo dva slučaja: $X(x, y)$ je polovište dužine kojoj jedna od krajnjih točaka $A(x_A, y_A)$ ima manju x koordinatu, ili je X polovište dužine kojoj jedna od krajnjih točaka $B(x, y_B)$ ima nižu y koordinatu, ali jednaku x koordinatu.

Provjerimo prvi slučaj. Neka je X polovište dužine $\overline{AA'}$. Tada vrijedi: $A' = (2x - x_A, 2y - y_A)$

$x > x_A \implies 2x - x_A > x \implies A'$ ima veću x koordinatu od $X \implies \perp$

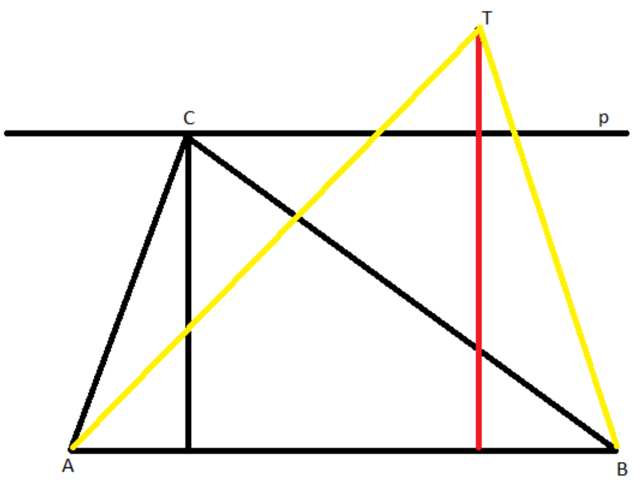
Sada provjerimo drugi slučaj. Neka je X polovište dužine BB'. Tada vrijedi $B' = (x, 2y - y_B)$. Analogno prošlom slučaju dobijamo da B' ima veću y koordinatu od X, što kontradiktira našu pretpostavku.

Iz toga zaključujemo da skup ne može biti konačan.

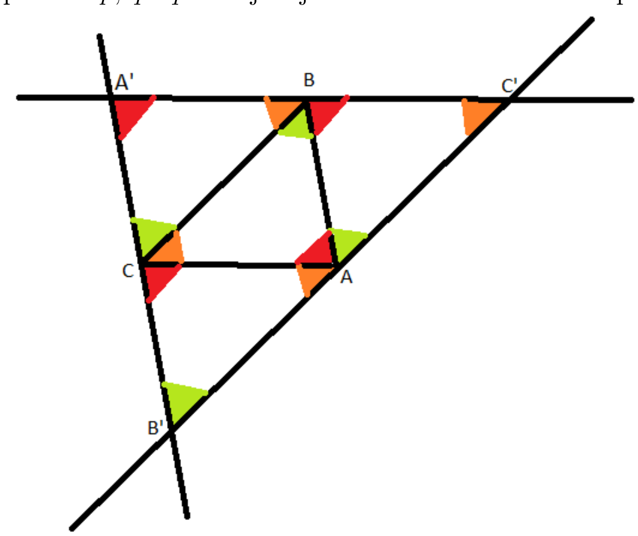
Q.E.D.

2. Dano je n točaka u ravnini, od kojih svake tri tvore trokut površine manje ili jednake 1. Dokažite da sve točke leže unutar nekog trokuta površine manje ili jednake 4.

Rješenje Promotrimo trokut ABC najveće površine. Provucimo pravac p kroz točku C paralelan s AB. Nijedna točka iz skupa nije s različite strane pravca p jer da postoji takva točka T, visina iz T na AB bila bi dulja od visine iz C na AB, što znači da trokut ABT ima veću površinu od ABC.



Analogno povučemo pravce q i r paralelne s AC i BC kroz B i A redom, i formiramo trokut $A'B'C'$ čiji su vrhovi sjecišta pravaca p, q i q. Zaključujemo da su sve točke iz skupa unutar $A'B'C'$.



Koristeći svojstva paralelnih pravaca, zaključimo da trokuti ABC, $A'BC$, $AB'C$ i ABC' imaju jednake kuteve. Kako svi trokuti imaju jednu stranicu jednaku odgovarajućoj stranici ABC, po poučku KSK svi ti trokuti su sukladni pa imaju istu površinu. Zato je

$$P(A'B'C') = 4P(ABC) \leq 4 \cdot 1 = 4$$

pa smo pokrili skup trokutom površine manje ili jednake 4.

3. U nekoj grupi ljudi svatko ima najviše tri neprijatelja. Dokaži da je ljude moguće podijeliti u dva tima tako da svaki ima najviše jednog neprijatelja u svome timu. Neprijateljstva su uzajamna.

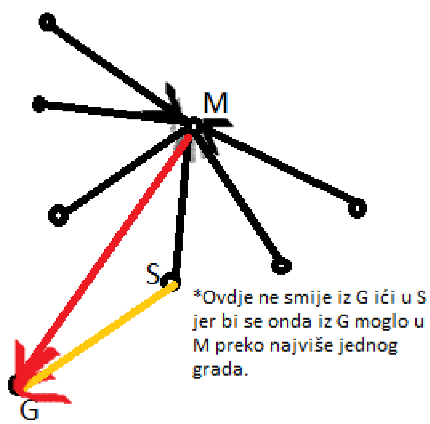
Rješenje Pretpostavimo suprotno - u svakoj podjeli netko ima barem 2 neprijatelja u timu. Podijelimo grupu u 2 tima A i B tako da je zbroj ukupnog broja neprijateljstava u A i ukupnog broja neprijateljstava u B, $n(A, B)$, najmanji mogući. BSO postoji igrač T u A takav da ima najmanje 2 neprijatelja u A. Tada on ima najviše 1 neprijatelja u B. Prebacimo li igrača T u tim B, ukupni broj neprijatelja će se smanjiti:

$$n(A - \{T\}, B \cup \{T\}) \leq n(A, B) - 2 + 1 = n(A, B) - 1 < n(A, B)$$

To je kontradikcija s odabirom timova A i B, stoga smo riješili zadatak.

4. Svaka hrvatska cesta je jednosmjerna. Svaki par gradova u Hrvatskoj povezan je točno jednom direktnom cestom. Pokaži da postoji grad u koji se može doći iz bilo kojeg grada prolazeći kroz najviše 1 drugi grad.

Rješenje Neka je M grad takav da ima najviše moguće direktnih veza, m. Ako se iz svakog grada može doći u M kroz najviše 1 drugi grad, gotovi smo. Pretpostavimo zato da postoji grad G iz kojeg se ne može doći u M preko najviše 1 grada.



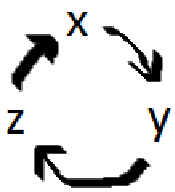
Tada se iz G ne može doći ni u M, niti u njegove direktne susjede, pa se iz M i njegovih susjeda može doći u G. To znači da G ima najmanje $m + 1$ direktnih veza, što je kontradikcija s odabirom grada M.

5. Riješite sustav jednadžbi u pozitivnim realnim brojevima:

$$\begin{aligned} a + h &= m^2 \\ e + t &= a^2 \\ m + e &= t^2 \\ t + a &= h^2 \\ h + m &= e^2 \end{aligned}$$

Rješenje Na prvu ruku mogli bismo pomisliti da je sustav simetričan, međutim to nije slučaj. Sustav je ciklički, što znači da imena varijabli možemo zamijeniti u određenom redosljedu. Bolje ćemo razumjeti pojam promotrimo li sljedeći primjer:

$$x + 2y = 3z$$
$$y + 2z = 3x$$
$$z + 2x = 3y$$



Dakle, zamijenimo li x sa y, y sa z, i z sa x, dobit ćemo isti sustav, ali ako zamijenimo y sa x i x sa y, dobijamo drugačiji sustav. Kod cikličkih sustava ne možemo pretpostaviti uređaj, ali zato bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je m najveći. Zaključujemo:

$$m \geq e$$
$$m^2 \geq e^2$$
$$a + h \geq h + m$$
$$a \geq m$$

Kako je $a \geq m$ i m najveći, mora biti $m = a$. Sad znamo da je i a najveći, pa možemo analogno zaključiti da je $m = a = t$. Ponavljanjem postupka zaključujemo da je $m = e = t = a = h$, pa iz $2m = m^2$ dobijemo da je jedino pozitivno rješenje $(2, 2, 2, 2, 2)$.

Drugo rješenje Korisno je promotriti elegantno rješenje korisnika ipaljak. Neka je hi najveci, a lo najmanji od brojeva m, e, t, a, h.

Promatrajuci jednadzbu u kojoj s desne strane stoji hi^2, zakljucujemo da je $hi^2 \leq 2hi$.
Promatrajuci jednadzbu u kojoj s desne strane stoji lo^2, zakljucujemo da je $lo^2 \geq 2lo$.

Buduci da su svi brojevi pozitivni, imamo $2 \leq lo \leq hi \leq 2$, pa je jedino rjesenje sustava $m = e = t = a = h = 2$.

4 Ozbiljniji lanac

1. Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$(x^2 + 1)y = z^2 + 1$$
$$(y^2 + 1)z = x^2 + 1$$
$$(z^2 + 1)x = y^2 + 1.$$

Rješenje Ovaj zadatak pojavio se na županijskom natjecanju iz matematike 2019. za 4. razred u A varijanti, a rješenje možete proučiti na linku.

2. Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana?

Rješenje Ovaj zadatak pojavio se na državnom natjecanju iz matematike 2011. za 1. razred u A varijanti, a rješenje možete proučiti na linku.

3. U nekoj državi između svaka dva grada postoji ili izravna autobusna ili izravna željeznička veza (sve veze su dvosmjerne i ne prolaze ni kroz jedan drugi grad).

   Dokaži da je gradove u toj državi moguće rasporediti u dva disjunktna skupa tako da je sve gradove u jednom skupu moguće obići putujući samo željeznicom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput, a sve gradove u drugom skupu putujući samo autobusom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput.

   Rješenje Ovaj zadatak pojavio se na državnom natjecanju iz matematike 2015. za 3. razred u A varijanti, a rješenje možete proučiti na linku.

4. Odredi sve trojke (a, b, c) prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$(36a + b)(a + 36b) = 2^c$$

   Rješenje Ovaj zadatak klasičan je primjer metode beskonačnog spusta, a u nastavku donosimo rješenje korisnika quomodo121

   Jednadzba nema rjesenje.

   Tvrdnju dokazimo metodom kontradikcije.

   Pretpostavimo da jednadzba ima barem 1 rjesenje, tada ce sigurno postojati trojka (x, y, z) koja je rjesenje jednadzbe i za koju vrijedi da je $x + y + z$ minimalno.

   Pogledajmo tu jednadzbu mod 2.

$$(36x + y)(36y + x) = 2^z \implies x, y \equiv 0 \pmod 2$$

   Neka je sada $x = 2x_1$ i $y = 2y_1$, uvrstavanjem nazad u jednadzbu imamo

$$4(36x_1 + y_1)(36y_1 + x_1) = 2^z$$

   Prije dijeljenja s 4 pogledajmo da li je to moguce, ako uvrstimo najmanje vrijednosti za a, b imamo sljedece

$$2^c = (36a + b)(36b + a) \geq (36 \cdot 1 + 1)(36 \cdot 1 + 1) = 37^2 > 32^2 = 2^{10} \implies c > 10 \implies z > 10$$

   Zakljucujemo da mozemo dijeliti s 4.

$$(36x_1 + y_1)(36y_1 + x_1) = 2^{z_1}; z_1 = z - 2$$

   Zakljucujemo da je (x_1, y_1, z_1) takoder rjesenje sustava.

   Primjetimo da je onda:

$$\begin{gathered} x_1 < x \\ y_1 < y \\ z_1 < z \\ \implies x_1 + y_1 + z_1 < x + y + z \\ \perp \end{gathered}$$

   Naisli smo na kontradikciju $\implies$ jednadzba nema rjesenja.

5. Unutar kruga polumjera 1 nalazi se n različitih točaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$. Za $i = 1, 2, \ldots, n$ neka d_i označava udaljenost od A_i do najbliže od preostalih točaka. Dokaži da vrijedi

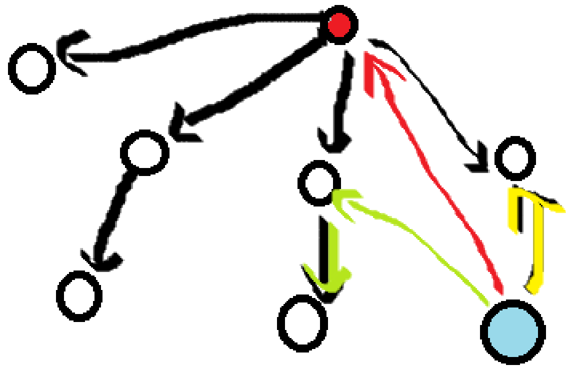
$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 \leq 16.$$

Rješenje Ovaj zadatak pojavio se na županijskom natjecanju iz matematike 2006. za 4. razred u A varijanti, a rješenje možete proučiti na linku.

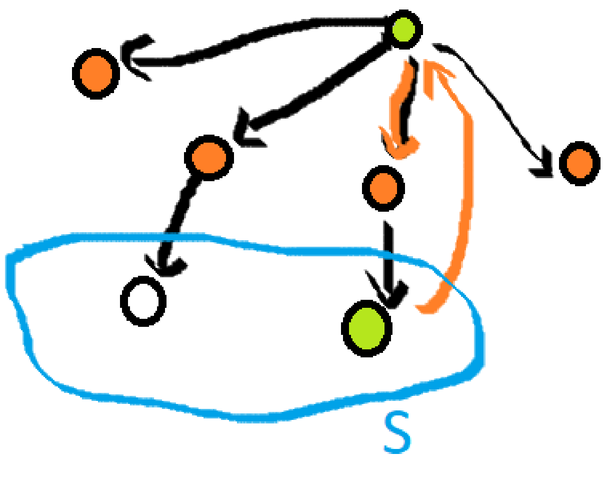
5 Ekstremniji zadaci

1. Na teniskom turniru sudjeluje n igrača, te igraju svaki sa svakim. Igrač A je "bolji" od igrača B ako ga je direktno pobijedio ili ako postoji igrač C kojeg je A pobijedio, te C pobijedio igrača B. Igrač koji je bolji od svih ostalih osvaja nagradu. Ako na kraju turnira imamo najviše jednu nagradu, dokažite da postoji igrač koji je direktno pobijedio sve ostale.

Rješenje Riješit ćemo zadatak u 2 koraka: objasnit ćemo zašto svaki skup igrača sigurno ima bar nekog pobjednika, a zatim ćemo dokazati da ako je neki pobjednik pobijedio nekoga isključivo indirektno, mora postojati još jedan pobjednik.



Zašto postoji pobjednik? Uzmimo igrača A takvog da ima najviše pobjeda, m. Pretpostavimo da postoji igrač B kojeg A nije pobijedio. Tada je B pobijedio A, a pobijedio je i sve igrače koje je A pobijedio (jer bi inače A bio indirektno bolji). Tada je B indirektno pobijedio i sve igrače od kojih je A indirektno bolji, pa B ima barem $m + 1$ pobjedu, što je kontradikcija s odabirom A. Dakle, zaključili smo da u svakoj grupi igrača postoji bar 1 pobjednik.

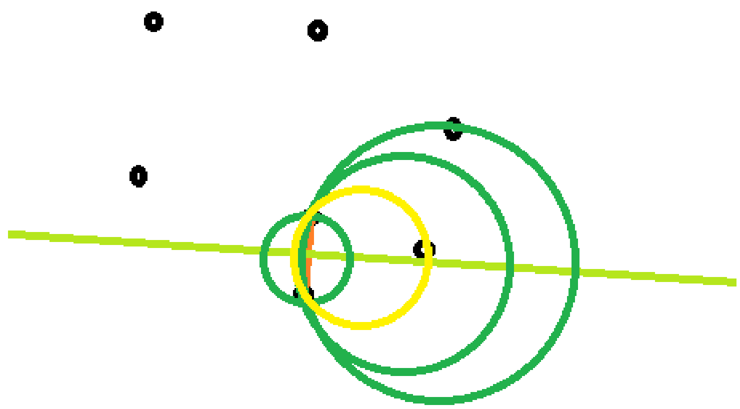


Uzmimo neki skup igrača i u njemu nekog pobjednika P, i pretpostavimo da taj pobjednik nekog nije pobijedio direktno. Promotrimo skup S, skup svih igrača koje P nije pobijedio direktno. Kako su svi ti igrači pobijedili P, indirektno su bolji i od svih igrača koje je P pobijedio direktno. U skupu tih igrača postoji neki pobjednik po prvoj dokazanoj tvrdnji, Q, pa je taj igrač i bolji od P, i sve igrače koje je P direktno pobijedio, i sve igrače od kojih je P indirektno bolji - zaključujemo da je i Q pobjednik. Dakle dokazali smo da ako je pobjednik od nekog indirektno bolji, sigurno postoje barem 2 pobjednika.

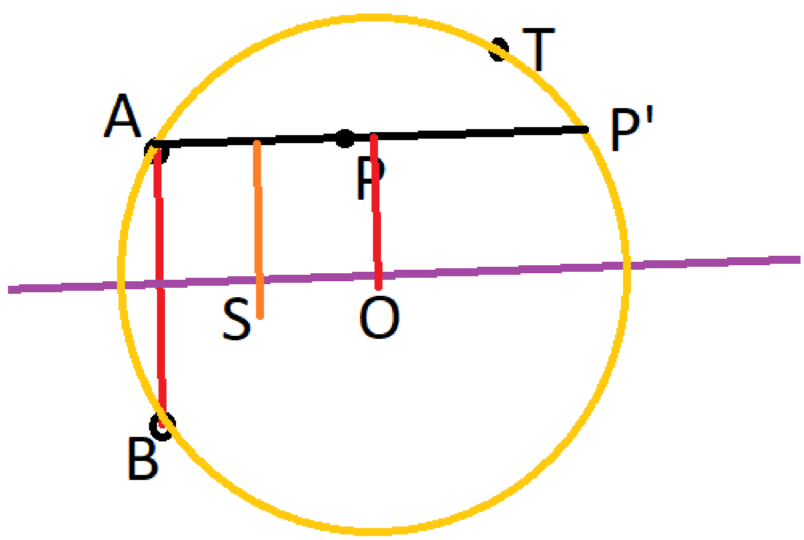
Stoga po obratu o kontrapoziciji tvrdnja vrijedi.

2. U ravnini je zadano $n3$ nekolinearnih točaka. Dokažite da postoji kružnica koja prolazi kroz tri zadane točke, a u čijoj se unutrašnjosti ne nalazi niti jedna od preostalih točaka.

Rješenje Odaberimo dvije točke A i B koje su međusobno najbliže, povucimo dužinu između njih i promotrimo njenu simetralu. U kružnici k čiji je $\overline{AB}$ promjer sigurno nema ostalih točaka jer inače $\overline{AB}$ ne bi bila najkraća.



Sada promatramo kružnice takve da prolaze kroz A i B i još jednu točku iz skupa, T. Središte im je na simetrali $\overline{AB}$. Od tih kružnica. Odaberimo onu najmanjeg radijusa. Da u toj kružnici postoji neka točka P, ona sigurno nije u kružnom odsječku odsječenom s AB i kraćim lukom jer je to unutar kružnice k. U kružnom odsječku generiranim duljim lukom ne može biti jer opisana kružnica trokuta APB ima manji radijus (vidi sliku). Dakle, zaključujemo da je ABT takva kružnica.



Drugo rješenje Jako lijepi pristup ovom zadatku možemo vidjeti u rješenju korisnika ipaljak: Odaberimo neke dvije najblize tocke A i B

Primijetimo da su svi kutovi $\angle ACB$, za neku od preostalih tocaka C, siljasti, u protivnom duzina AB ne bi bila minimalna. Odabrat cemo neku tocku C tako da je $\angle ACB$ maksimalan.

Buduci da nijedan $\angle AC'B$ nije tup, sigurno se nijedna od preostalih tocaka ne moze nalaziti u kruznom odsjecku manje povrsine.

Takodjer se niti jedna tocka ne moze nalaziti u kruznom odsjecku vece povrsine jer bi tada $\angle AC'B$ bio veci od $\angle ACB$. Doduse, moguce je da se neka tocka C' nalazi na kruznici jer su svi obodni kutovi na tetivom AB jednaki.