Polinomi - rješenja

Ivan Miošić za Metamath 2022

1. studenoga 2022.

1 Osnovni lanac

Podijeli pa vladaj

Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{2022} + x + 1$ sa $g(x) = x^2 - 1$.

Prvo rješenje (dosadno i komplicirano).
Polinomi se podijele pismeno, lako se uoči uzorak koji se ponavlja. Ostatak ispadne $\boxed{x+2}$.

Drugo rješenje (elegantno).
Po teoremu o dijeljenju polinoma, znamo da vrijedi

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \tag{$\star$}$$

za neke polinome $q(x)$ i $r(x)$, s tim da je stupanj polinoma r najviše 1. Dakle, $r(x) = ax + b$, za neke realne koeficijente a, b. Jasno, polinom r je upravo traženi ostatak. Pitanje je još kako najefikasnije odrediti koeficijente a i b.
Sada dolazi ključni dio. U jednakost $(\star)$ uvrštavamo nultočke polinoma $g(x)$. To su $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$. Time se umnožak $g(x) \cdot q(x)$ poništi. Tako dobijemo sljedeći sustav od dvije jednadžbe u nepoznanicama a i b:

$$\begin{aligned} f(x_1) = r(x_1) &\implies 3 = a + b \\ f(x_2) = r(x_2) &\implies 1 = -a + b. \end{aligned}$$

Lako riješimo i dobijemo $a = 1$, $b = 2$. Dakle, $\boxed{r(x) = x + 2}$.

Treće rješenje (credit: zaq).

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{2022} + x + 1 \\ &= x^{2022} - 1 + x + 2 \\ &= (x^2 - 1)(x^{1011} + x^{1010} + \cdots + 1) + x + 2 \\ &= g(x)(x^{1011} + x^{1010} + \cdots + 1) + x + 2 \\ &\implies f(x) \equiv \boxed{x+2} \pmod{g(x)} \end{aligned}$$

Sumiraj pa nadgledaj

Koja je suma recipročnih korijena jednadžbe

$$\frac{2003}{2004}x + 1 + \frac{1}{x} = 0.$$

Prvo rješenje (dosadno i komplicirano).
Riješimo jednadžbu i izračunamo traženi izraz. Dobije se $\boxed{-1}$.

Drugo rješenje (elegantno).
Neka su rješenja dane jednadžbe označena s x_1 i x_2. Traženi iznos je

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1x_2} + \frac{x_1}{x_1x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}.$$

Promatramo sada jednadžbu. Znamo da ne želimo x u nazivniku, pa množimo sve s x. Time dobijemo ekvivalentnu* jednadžbu (osim što eventualno rješenje 0 ne prihvaćamo):

$$\frac{2003}{2004}x^2 + x + 1 = 0.$$

Pomnožimo još s $\frac{2004}{2003}$ jer volimo normirane kvadratne jednadžbe:

$$x^2 + \frac{2004}{2003}x + \frac{2004}{2003} = 0.$$

Dakle, za traženi izraz trebamo izračunati zbroj i umnožak rješenja ove kvadratne jednadžbe. Viete u pomoć! Dobijemo $x_1 + x_2 = -\frac{2004}{2003}$ i $x_1x_2 = \frac{2004}{2003}$. Zato je traženi iznos $\boxed{-1}$.

Općinsko natjecanje 2005 SŠ2 4

Nađite koeficijente a i b takve da polinom $ax^5 + bx^4 + 1$ bude djeljiv s $x^2 - x - 1$.

Prvo rješenje (dosadno i komplicirano).
Podijeli se s općim koeficjientima a i b da bi se dobio opći oblik ostatka. Onda se on izjednačava s nulom. Dobije se $\boxed{a = 3, b = -5}$.

Drugo rješenje (elegantnije i zanimljivije, credit: PatrIk).
Slično kao u prvom zadatku, promatramo nultočke djelitelja $g(x) = x^2 - x - 1$. To su omjeri zlatnog reza $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $-\varphi^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Njihovim uvrštavanjem u polinom $f(x) = ax^5 + bx^4 + 1$ trebamo dobiti 0, jer treba vrijediti $f(x) = g(x) \cdot q(x)$, za neki polinom $q(x)$.
Sada bi trebalo izračunati φ^5. Evo elegantnog načina polaznika PatrIk:

$$\varphi^{-1} = -\varphi + 1$$

$$\varphi^1 = \varphi + 0$$
$$\varphi^2 = \varphi + 1$$
$$\varphi^3 = 2\varphi + 1$$
$$\varphi^4 = 3\varphi + 2$$
$$\varphi^5 = 5\varphi + 3$$

„I da to je Fibonacci sequence na lijevoj i desnoj strani. Zaista lijepo."
Dalje je jednostavno, dobije se sustav od dvije jednadžbe u nepoznanicama a i b, čije rješenje je $\boxed{a = 3, b = -5}$.

Treće rješenje (izravno, credit: quomodo121).
Ako je $ax^5 + bx^4 + 1$ djeljiv s $x^2 - x - 1$ onda vrijedi sljedeće.

$$ax^5 + bx^4 + 1 = (x^2 - x - 1)(ax^3 + cx^2 + dx - 1)$$
$$ax^5 + bx^4 + 1 = ax^5 + cx^4 + dx^3 - x^2 - ax^4 - cx^3 - dx^2 + x - ax^3 - cx^2 - dx + 1$$

Uspoređivanjem koeficijenata dobijemo sustav.

$$b = c - a$$
$$d - c - a = 0$$
$$-1 - d - c = 0$$
$$1 - d = 0$$

$$\implies 1 = d \implies c = -2 \implies a = 3 \implies b = -5$$

Zaključujemo da polinom treba biti $\boxed{3x^5 - 5x^4 + 1}$.

Vi idete?

Neka su x_1, x_2 i x_3 rješenja jednadžbe $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Odredite $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)$.

Prvo rješenje (standardno pomoću Vieteovih formula, credit: quomodo121).
Prema Vietovim formulama vrijedi:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-2}{1} = 2$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{3}{1} = 3$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{-4}{1} = 4$$

Množenjem zadanog izraza imamo

$$(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1) = x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

Drugo rješenje (lukavo i vrlo elegantno, credit: PatrIk).

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Uvrštavajući $x = -1$ dobijamo

$$-1 - 2 - 3 - 4 = (-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3)$$

Sad ćemo faktorizirat -1:

$$-(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) = -10$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) = 10$$

I tako dobijamo da je to jednako 10.

2 Ozbiljniji lanac

Budimo racionalni

Dokaži da $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ **nije** racionalan broj.

Prvo rješenje (direktno, bez polinoma).
Svi znamo da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj (dokažite ako ne znate). Onda pretpostavimo suprotno, tj. da je traženi broj $a = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ racionalan. Tada vrijedi $\sqrt{3} = 2 - a^2$. Lijeva strana je iracionalan broj, a desna racionalan. Kontradikcija, dakle a mora biti iracionalan.

Drugo rješenje (preko polinoma).
Neka je opet traženi broj označen s $a = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Kvadriramo i prebacimo, opet kvadriramo i prebacimo da dobijemo:

$$a^4 - 4a^2 + 1 = 0.$$

Definirajmo polinom $p(x) = x^4 - 4x^2 + 1$. Vidimo da vrijedi $p(a) = 0$, dakle a je nultočka polinoma p.
Zanimaju nas onda racionalne nultočke polinoma p. Koristimo teorem o racionalnim nultočkama polinoma. Vidimo da jedine racionalne nultočke mogu biti 1 i -1. No, nijedna ne zadovoljava jednadžbu $p(x) = 0$. Stoga ovaj polinom nema racionalnih nultočaka. Zaključujemo da a ne može biti racionalan broj, kao nultočka polinoma p.

Summa sumarum - ništa

Neka su a, b, c, x, y realni brojevi takvi da

$$\begin{aligned} a^3 + ax + y &= 0, \\ b^3 + bx + y &= 0, \\ c^3 + cx + y &= 0. \end{aligned}$$

Ako su a, b, c svi međusobno različiti, dokaži da im je suma jednaka nuli.

Prvo rješenje (izravno, credit: karlapogelsek).
Oduzimanjem prve dvije jedndžbe, nakon sređivanja dobijemo:

$$(a-b)(x + a^2 + ab + b^2) = 0.$$

Iz uvjeta zadatka znamo $a \neq b$, dakle $a - b \neq 0$, pa mora vrijediti

$$x + a^2 + ab + b^2 = 0. \tag{$\star$}$$

Analogno, oduzimanjem treće jednadžbe od prve, dobijemo:

$$x + a^2 + ac + c^2 = 0. \tag{$\star\star$}$$

Izjednačavanjem $(\star)$ i $(\star\star)$ dobije se:

$$\begin{aligned} \cancel{x} + \cancel{a^2} + ab + b^2 &= \cancel{x} + \cancel{a^2} + ac + c^2 \\ ab + b^2 &= ac + c^2 \\ b^2 - c^2 &= ac - ab \\ (b-c)(b+c) &= a(c-b) \end{aligned}$$

Ponovno, zbog $b \neq c$ možemo kratiti s $(b - c)$, iz čega dobijemo upravo $a + b + c = 0$.

Drugo rješenje (elegantnije, preko polinoma, credit: zaq)
Neka je f polinom definiran kao

$$f(t) := t^3 + xt + y.$$

Imamo da je $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Po Viétovim formulama slijedi $a + b + c = 0$.

Polino-polinom

Neka je zadan polinom $P(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, uz $a \neq 0$. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$P(x^2 + 4x - 7) = 0$$

ako je poznato da je jedno od njih jednako 1 i barem jedno rješenje je dvostruko.

Rješenje (credit: vaza).
Neka su p, q nultočke polinoma $ax^2 + bx + c$. Tada za rješenja jednadžbe $P(x^2 + 4x - 7) = 0$ vrijedi:

$$x^2 + 4x - 7 = p \text{ ili } x^2 + 4x - 7 = q.$$

Kako je jedno od rješenja $x_1 = 1$, možemo bez gubitka općenitosti pretpostaviti:

$$p = 1^2 + 4 \cdot 1 - 7 = -2.$$

Tada rješavanjem jednadžbe $x^2 + 4x - 7 = -2$ dobijamo još rješenje $x_2 = -5$. Kako je $x_1 \neq x_2$ vrijedi jedan od dva slucaja:

1. $x^2 + 4x - 7 = q$ ima dvostruko rjesenje;
2. $p = q$.

U drugom slučaju vrijedi $\boxed{x_1 = 1, x_2 = -5, x_3 = 1, x_4 = -5}$
U prvom slučaju, determinanta iznosi $D = 16 - 4(-7 - q) = 0$. Da bi rješenja bila dvostruka, mora vrijediti $q = -11$.
Jednadžba tada glasi: $x^2 + 4x + 4 = 0$. Rješenja su $x_3 = x_4 = -2$.
Konačno, sva rješenja polazne jednadžbe u ovom slučaju su

$$\boxed{x_1 = 1, x_2 = -5, x_3 = -2, x_4 = -2}.$$

Povezani polinomi

Neka za realne brojeve a, b i c polinom

$$g(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$$

ima tri različita korijena, koji su svi ujedno i korijeni polinoma

$$f(x) = x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c.$$

Izračunajte $f(1)$.

Prvo rješenje (pomoću djeljivosti, credit: PatrIk).
Kako f ima sve korijene polinoma g kao svoje korijene, vrijedi $g \mid f$. Zbog vodećih koeficijenata 1, znamo da za neki r vrijedi:

$$f(x) = g(x) \cdot (x - r).$$

Raspisivanjem dobijemo $f(x) = x^4 + x^3(a-r) + x^2(1-ra) + x(10-r) - 10r$. Sad izjednačavamo.
Znamo da je $10 - r = 100$ i $a = r$, pa je $a, r = -90$.
To je uglavnom sve što nam treba da dobijemo:

$$f(1) = g(1) \cdot (1 + 90)$$

$$f(1) = (12 - 90)(1 + 90)$$

$$f(1) = -91 \cdot 78$$

Drugo rješenje (pomoću Vieteovih formula, credit: quomodo121).
Neka su x_1, x_2, x_3 nultocke polinoma $g(x)$, te x_1, x_2, x_3, x_4 nultočke polinoma $f(x)$.
Primjenom Vieteovih formula na $g(x)$ imamo:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a = \psi_1$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1 = \psi_2$$

$$x_1x_2x_3 = -10 = \psi_3$$

Te primjenom Vieteovih formula na $f(x)$ imamo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \psi_1 + x_4 = -a + x_4 = -1$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_1x_3 = \psi_2 + x_4\psi_1 = b$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = \psi_3 + x_4\psi_2 = -100$$

$$x_1x_2x_3x_4 = x_4\psi_3 = c$$

Međusobnim sređivanjem izraza dobijamo sljedeći sustav:

$$x_4 = a - 1$$

$$x_4 = \frac{1-b}{a}$$

$$x_4 = -90$$

$$x_4 = -\frac{c}{10}$$

Odakle vrijedi $(a, b, c) = (-89, -8009, 900)$.
Stoga je $f(1) = 1 + 1 - 8009 + 100 + 900 = -7007$.

3 Teži lanac

Apsolutno jedan

Odredi sve polinome takve da im je vodeći koeficijent 1, a svi ostali koeficijenti mogu biti 1 ili -1 uz uvjet da su svi korijeni polinoma realni brojevi.

Rješenje.
Neka su $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ti realni korijeni polinoma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Iz općenitih Vieteovih formula imamo

$$r_1 + \cdots + r_n = -a_{n-1} \text{ i } r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n = a_{n-2}$$

iz čega slijedi

$$r_1^2 + \cdots + r_n^2 = (r_1 + \cdots + r_n)^2 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n) = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \leq 3.$$

Uočimo da je lijeva strana pozitivna pa je $a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \geq 0$. Kako je $a_{n-1} = \pm 1$ slijedi da je $a_{n-2} = -1$. Također, opet iz Vieteovih formula je $(r_1r_2 \cdots r_n)^2 = 1$. Iz A-G nejednakosti imamo $r_1^2 + \cdots + r_n^2 \geq n$, pa je $n \leq 3$. Sada smo si dosta pojednostavili život i sva rješenja lako računamo:

$$x \pm 1, x^2 \pm x - 1 \text{ i } x^3 - x \pm (x^2 - 1).$$

Djelomično

Neka je P polinom stupnja n takav da je

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \text{ , za sve } k \in 0, 1, \ldots, n.$$

Odredite $P(n+1)$

Rješenje (credit: zaq).
Neka je Q polinom definiran kao

$$Q(x) := (x+1)P(x) - x. \tag{$\star$}$$

Neka je a vodeći član polinoma $Q(x)$. Vidimo da je $\deg Q = \deg P + 1 = n + 1$, a po uvjetu zadatka imamo

$$Q(0) = Q(1) = \cdots = Q(n) = 0.$$

Tih $n+1$ nultočaka, uz koeficijent a, onda jedinstveno definiraju Q pa imamo da je

$$Q(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n). \tag{$\star\star$}$$

Uvrštavanjem $x = -1$ dobijemo:

$$\begin{aligned} (\star) &\implies Q(-1) = (-1+1)P(-1) + 1 = 1 \\ (\star\star) &\implies Q(-1) = a(-1)(-1-1)(-1-2) = a(-1)^{n+1}(n+1)!, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$a = (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}.$$

Sada dobijemo

$$Q(n+1) = a(n+1)\cdot n \cdot (n-1)\cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = (-1)^{n+1},$$

i konačno:

$$P(n+1) = \frac{Q(n+1)+n+1}{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}+n+1}{n+2}.$$