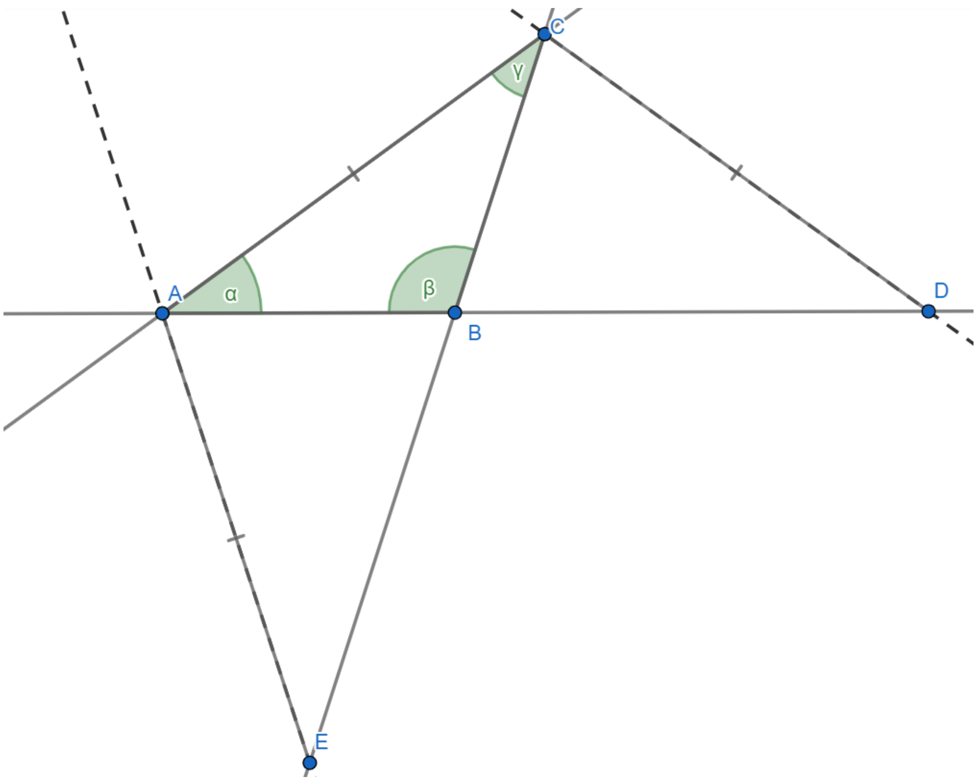
Angle chasing - osnovni lanac

Zadatak 1. Zadan je tupokutan trokut ABC s tupim kutom u vrhu B. Simetrala vanjskog kuta pri vrhu C siječe pravac AB u točki D, a simetrala vanjskog kuta pri vrhu A siječe pravac BC u točki E. Odredi veličine kutova trokuta ABC ako vrijedi da je $|AE| = |AC| = |CD|$.

Rješenje. Skica:



U ovakvim zadatcima gdje je zadana jednakost duljina nekih stranica trokuta, najčešće je ideja tražiti sukladne trokute ili uočavati jednakokračne trokute. Ovdje su očito neki trokuti jednakokračni, ali krenimo od vanjskih kutova.

Ako je α' vanjski kut pri vrhu A, vrijedi $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ pa je odatle $\angle EAB = \frac{\alpha'}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Slično, ako je γ' vanjski kut pri C, vrijedi $\angle BCD = \frac{\gamma'}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

Trokut CAE je jednakokračan pa je $\angle CEA = \gamma$. Promatrajući unutarnje kutove tog trokuta, imamo:

$$\left(\alpha+\frac{\alpha'}{2}\right)+\gamma+\gamma=180^\circ$$

$$90^\circ+\frac{\alpha}{2}+2\gamma=180^\circ$$

$$\alpha+4\gamma=180^\circ$$

$$\alpha=180^\circ-4\gamma \qquad (*)$$

Trokut ADC je jednakokračan pa je $\angle ADC=\alpha$. Promatrajući unutarnje kutove tog trokuta, imamo:

$$\alpha+\alpha+\left(\gamma+\frac{\gamma'}{2}\right)=180^\circ$$

$$2\alpha+90^\circ+\frac{\gamma}{2}=180^\circ$$

$$4\alpha+\gamma=180^\circ$$

Dalje, zbog $(*)$ je

$$4(180^\circ-4\gamma)+\gamma=180^\circ$$

$$720^\circ-16\gamma+\gamma=180^\circ$$

$$15\gamma=540^\circ$$

$$\gamma=36^\circ$$

Uvrštavanjem umjesto γ u $(*)$ dobivamo

$$\alpha=180^\circ-4\cdot 36^\circ$$

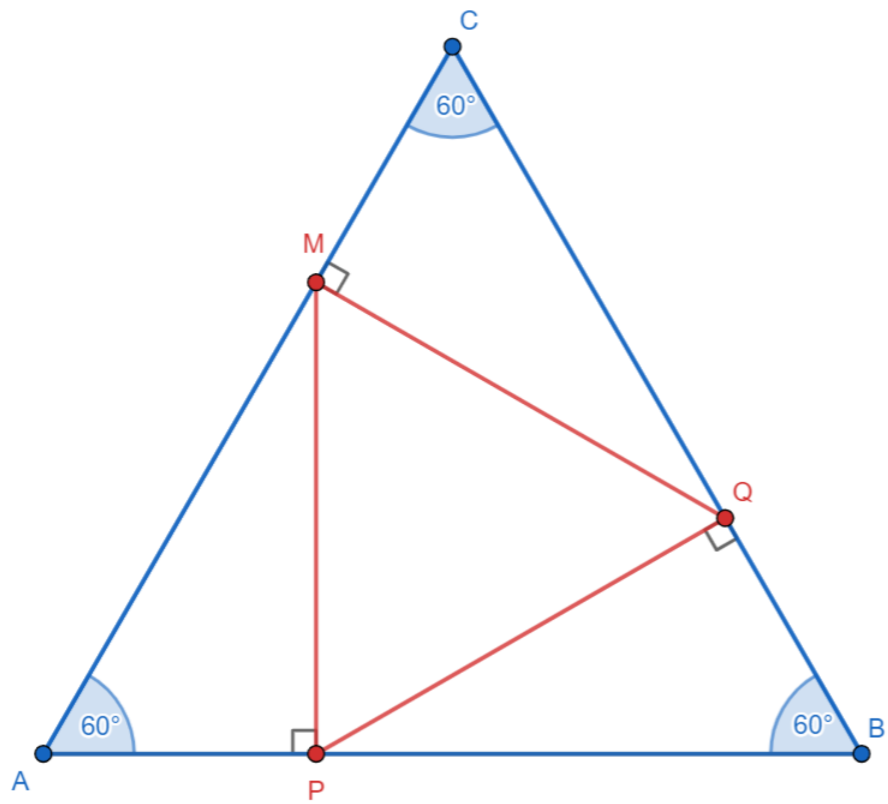
$$\alpha=180^\circ-144^\circ$$

$$\alpha=36^\circ$$

Kada znamo α i γ, iz trokuta ABC lako dobivamo $\beta=108^\circ$.

Zadatak 2. Dan je jednakostraničan trokut ABC, pri čemu je $|AB| = 9$ cm. Neka je točka M na stranici $\overline{AC}$, točka P nožište okomice iz M na $\overline{AB}$, točka Q nožište okomice iz P na $\overline{BC}$ i okomica iz Q na $\overline{AC}$ siječe $\overline{AC}$ u točki M. Izračunaj duljinu $|AM|$.

Rješenje. Skica:



Uočimo da su trokuti APM, BQP i CMQ takvi da su im unutarnji kutovi veličine $30°$, $60°$ i $90°$ (zato što je $\triangle ABC$ jednakostraničan pa ima sve kutove veličine $60°$). Stoga, promatrajući „situaciju" kod točke P, imamo $\angle APM + \angle MPQ + \angle QPB = 180°$, odakle je $\angle MPQ = 60°$. Analogno se dobiva $\angle PQM = \angle QMP = 60°$ što znači da je trokut MPQ jednakostraničan.

Već smo ustanovili da trokuti APM, BQP i CMQ imaju unutarnje kutove jednake veličine, a sada zbog toga što je $\triangle MPQ$ jednakostraničan možemo prema KSK poučku o sukladnosti trokuta zaključiti da su ta tri trokuta sukladna.

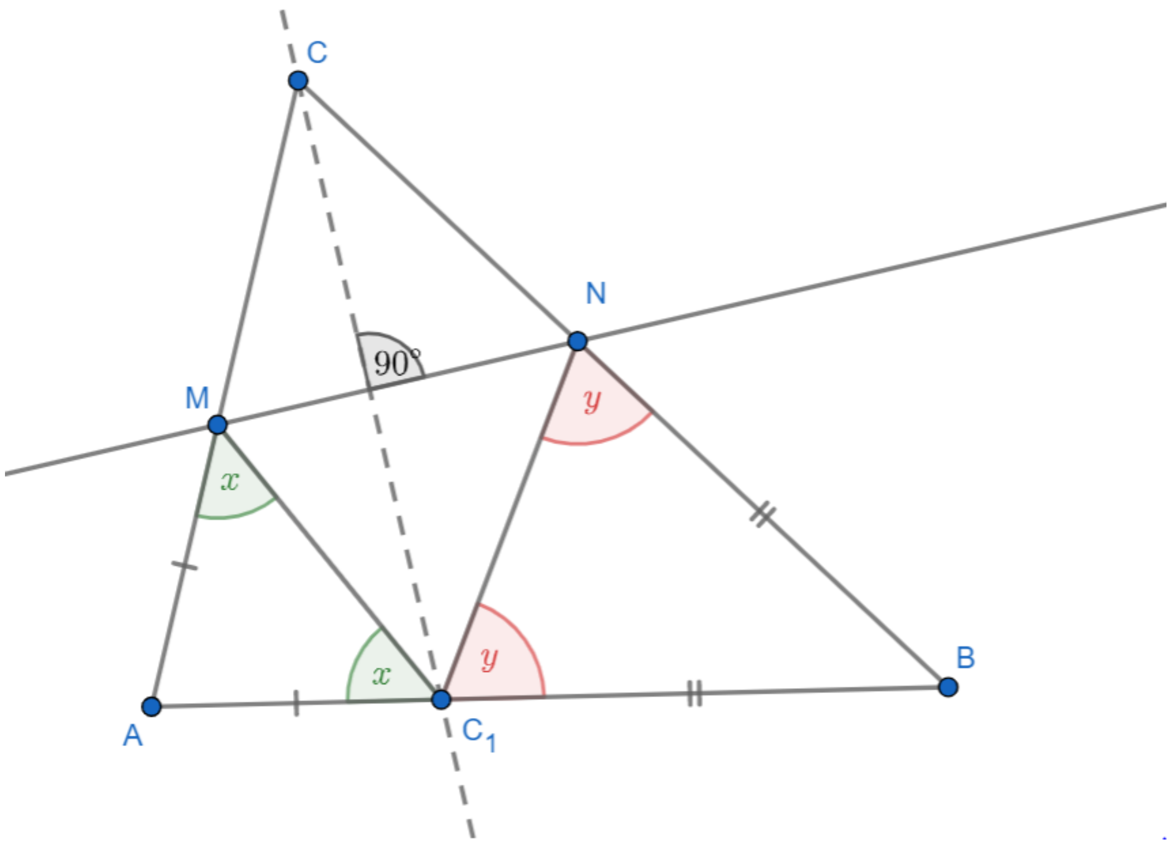
Zbog sukladnosti trokuta APM i CMQ vrijedi $|AP| = |CM|$. Također, zato što je trokut APM pravokutan s kutovima $30°$, $60°$ i $90°$ vrijedi $|AP| = \frac{|AM|}{2}$. Zbog $|AC| = 9$ cm, imamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
|AC| &= 9 \\
|AM| + |MC| &= 9 \\
|AM| + |AP| &= 9 \\
|AM| + \frac{|AM|}{2} &= 9 \\
3|AM| &= 18 \\
|AM| &= 6
\end{aligned}$$

Dobili smo $|AM| = 6$ cm.

Zadatak 3. Stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC neki pravac p siječe redom u točkama M i N, tako da osnosimetrična slika C_1 vrha C s obzirom na taj pravac leži na stranici $\overline{AB}$ i pri tome je $|AC_1| = |AM|$ i $|BC_1| = |BN|$. Kolki je kut $\angle ACB$?

Rješenje. Skica:



Neka je $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ i $\gamma = \angle BCA$.

Prisjetimo se da je osna simetrija preslikavanje koje likove preslikava u sukladne. Budući da točke M i N pripadaju osi simetrije, one se preslikavaju u same sebe. Prema tome, trokuti MNC i NMC_1 su sukladni pa je $\gamma = \angle ACB = \angle MCN = \angle MC_1N$.

Trokuti AC_1M i BNC_1 su jednakokračni pa uz oznake kao na slici vrijedi

$$x = \frac{180° - \alpha}{2}, \qquad y = \frac{180° - \beta}{2}.$$

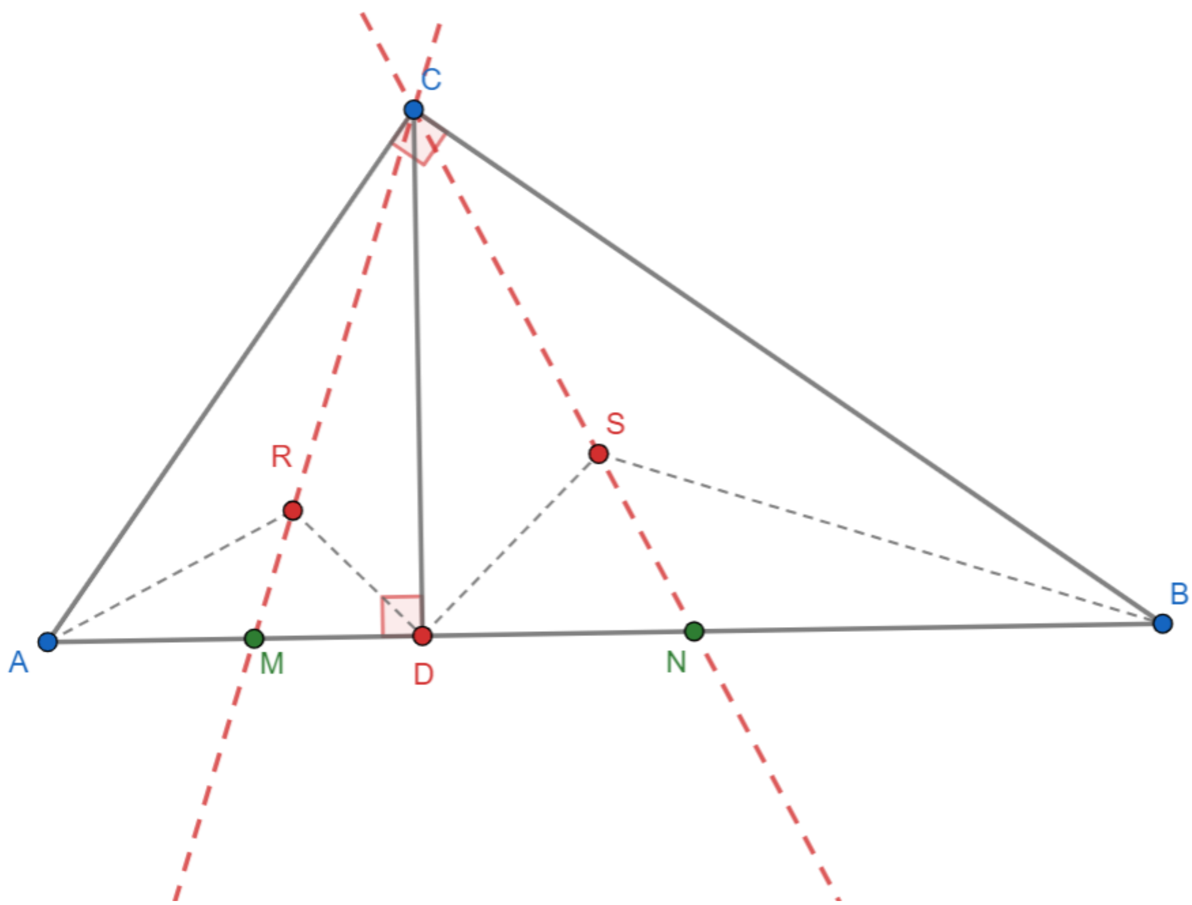
Točka C_1 pripada stranici $\overline{AB}$ pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
\angle AC_1M + \angle MC_1N + \angle NC_1B &= 180^\circ \\
x + \gamma + y &= 180^\circ \\
\frac{180^\circ - \alpha}{2} + \gamma + \frac{180^\circ - \beta}{2} &= 180^\circ \\
180^\circ - \alpha + 2\gamma + 180^\circ - \beta &= 360^\circ \\
-\alpha - \beta + 2\gamma &= 0^\circ
\end{aligned}$$

Zbrajajući ovaj izraz sa $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ dobivamo $3\gamma = 180^\circ$, odnosno $\gamma = 60^\circ$.

Zadatak 4. Zadan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom u vrhu C. Neka je točka D nožište visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$, točka R središte kružnice upisane trokutu ADC i točka S središte kružnice upisane trokutu BDC. Ako pravac CR siječe hipotenuzu $\overline{AB}$ u točki M, a pravac $\overline{CS}$ u točki N, onda je $|AC| = |AN|$ i $|BC| = |BM|$ Dokaži!

Rješenje. Skica:



Neka je $\alpha = \angle BAC$ i $\beta = \angle ABC$.

Tada je $\angle ACD = \angle ABC = \beta$ zato što su to kutovi s okomitim pravcima. Iz istog razloga je $\angle BCD = \angle CAB = \alpha$.

Budući da su R i S središta upisanih kružnica, pravci CR i CS su redom simetrale kutova $\angle ACD$ i BCD pa slijedi $\angle BCN = \angle NCD = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle ACM = \angle MCD = \frac{\beta}{2}$.

Kut $\angle ANC$ je vanjski kut trokuta BCN pa je njegova veličina jednaka zbroju veličina preostalih unutarnjih kutova, dakle $\angle = ANC = \beta + \frac{\alpha}{2}$, no i za kut $\angle ACN$ vrijedi $\angle ANC = \angle ACD + \angle NCD = \beta + \frac{\alpha}{2}$. To znači da je trokut ANC jednakokračan i $|AC| = |AN|$.

Analogno se dokazuje i da je trokut BCM jednakokračan i $|BC| = |BM|$.

Zadatak 5. Dan je trokut ABC sa svojstvom da je $\angle CAB = 2\angle ABC$. Ako su $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$ duljine stranica trokuta ABC, dokaži da vrijedi jednakost

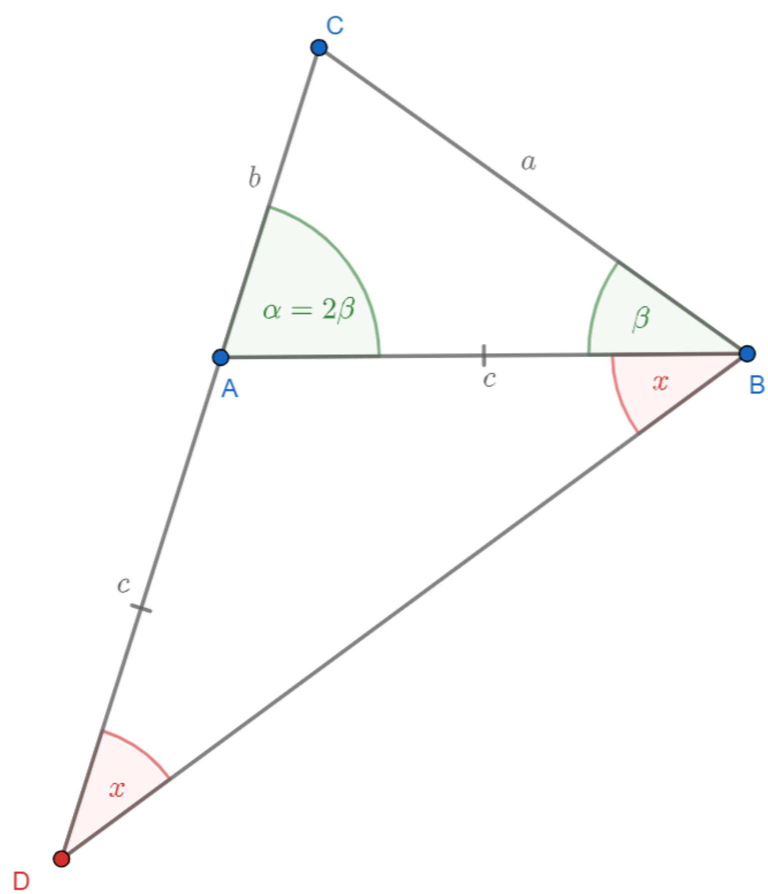
$$a^2 = b(b+c).$$

Rješenje. U ovakvim geometrijskim zadatcima gdje je potrebno dokazati jednakost dva umnoška treba imati na umu da se tražena jednakost može transformirati u

$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}.$$

Tada uočavamo da je omjer duljina nekih stranica jednak pa treba dokazati sličnost „nekih" trokuta. Iz omjera vidimo da bi slični trebali biti trokut sa duljinama stranica a i $b+c$ te trokut sa duljinama stranica b i a.

Ovaj potonji već imamo, to je trokut ABC. No, ovaj prvospomenuti nemamo na slici. Ono što možemo napraviti je produljiti stranicu duljine b preko točke A za duljinu c. Neka je tako dobivena točka D. Sada možemo nacrtati skicu:



Ideja je da dokažemo da su trokuti ABC i BDC slični, jer će tada traženi omjer slijediti iz sličnosti tih trokuta.

Za početak, neka je $\beta = \angle ABC$. Tada je zbog uvjeta zadatka $\angle CAB = 2\beta$.

Neka je $x = \angle CDB$. Trokut ADB je jednakokračan, stoga je i $\angle DBC = x$. Kut $\angle CAB$ je vanjski kut trokuta ADB pa je njegova veličina jednaka zbroju veličina preostalih unutarnjih kutova. Budući da je $\angle CAB = 2\beta$, slijedi:

$$2\beta = 2x \implies \beta = x$$

Kut $\angle DBC$ tada je jednak:

$$\angle DBC = x + \beta = \beta + \beta = 2\beta = \angle CAB.$$

Budući da je i $\angle ADB = x = \beta = \angle ABC$, prema K-K poučku o sličnosti trokuta slijedi

$$\triangle ABC \sim \triangle BDC,$$

a odatle je

$$\frac{b+c}{a} = \frac{a}{b},$$

odnosno

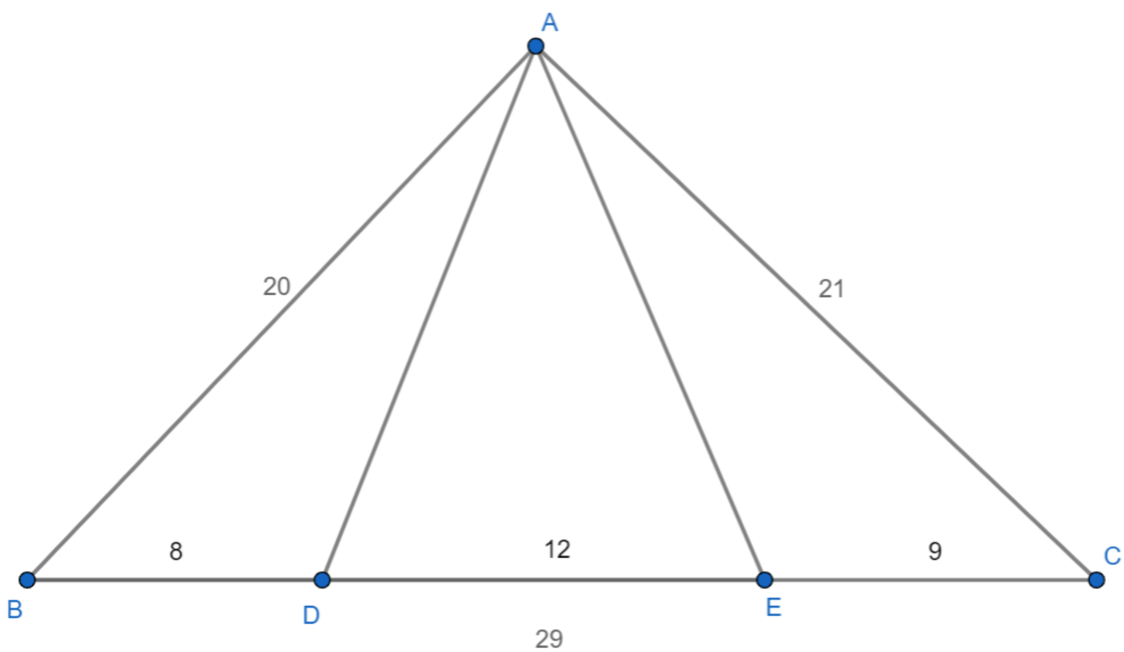
$$a^2 = b(b+c),$$

što je i trebalo dokazati.

Angle chasing - ozbiljniji lanac

Zadatak 1. U trokutu ABC duljine stranica su $|AB| = 20$, $|AC| = 21$ i $|BC| = 29$. Točke D i E su na stranici $\overline{BC}$ takve da je $|BD| = 8$ i $|EC| = 9$. Odredite veličinu kuta $\angle DAE$.

Rješenje. Skica:



Uočimo najprije kako je $20^2 + 21^2 = 29^2$ pa je zbog obrata Pitagorinog poučka trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu A.

Također, uočimo da je $|BE| = |BD| + |DE| = 8 + 12 = 20 = |AB|$ pa je trokut ABE jednakokračan te slijedi $\angle BAE = \angle BEA$.

Isto tako je $|DC| = |DE| + |EC| = 12 + 9 = 21 = |AC|$ pa je trokut ADC jednakokračan te slijedi $\angle CDA = \angle DAC$.

Izrazimo $\angle DAE$ preko ostalih unutarnjih kutova u trokutu ADE:

$$\angle DAE = \angle BAE + \angle DAC - \angle BAC$$

$$\angle DAE = \angle BEA + \angle ADC - 90^\circ$$

$$\angle DAE = 180^\circ - \angle DAE - 90^\circ$$

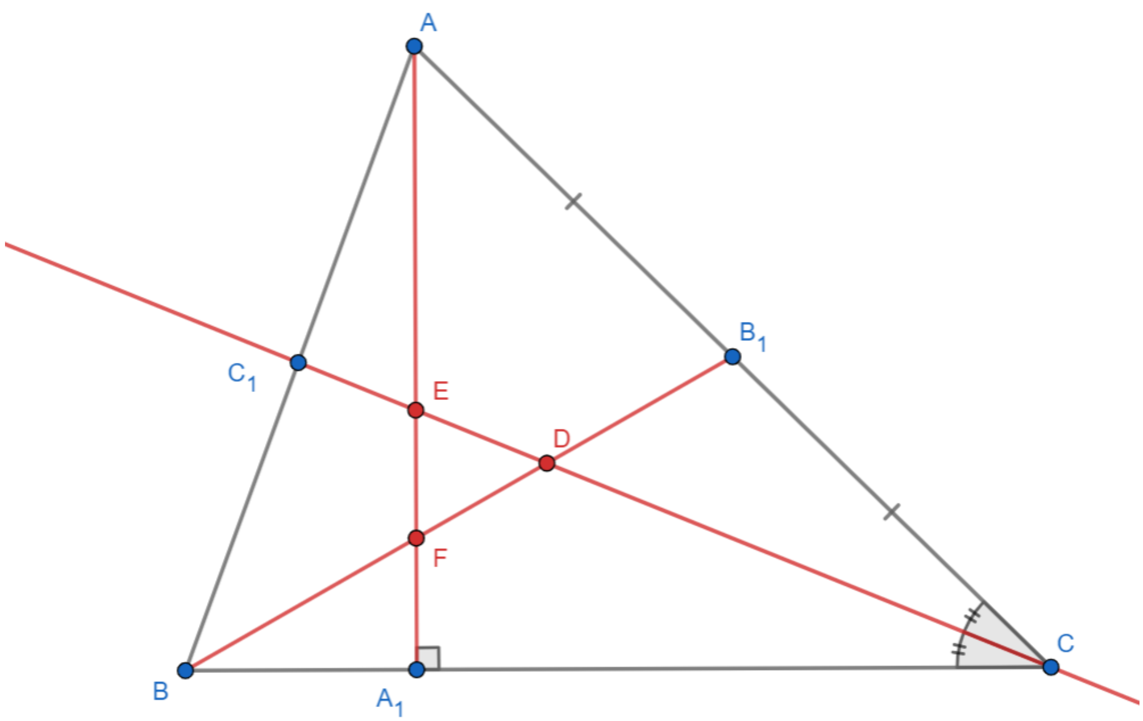
$$2\angle DAE = 90\circ$$

$$\angle DAE = 45^\circ$$

Zadatak 2. Iz jednog vrha šiljastokutnog trokuta povučena je visina, iz drugog težišnica, a iz trećeg simetrala kuta. Ta tri pravca ne prolaze istom točkom, već njihove točke presjeka čine vrhove novog trokuta. Dokaži da novi trokut ne može biti jednakostraničan.

Rješenje. Kada u nekom zadatku treba dokazati da je nešto nemoguće, često je dobra taktika pretpostaviti suprotno i u nekom trenutku doći do nečeg što nije moguće, do kontradikcije.

Neka je A_1 nožište visine iz točke A na $\overline{BC}$, B_1 sjecište težišnice iz točke B i stranice $\overline{AC}$ i C_1 sjecište simetrale kuta iz vrha C i stranice $\overline{AB}$. Točke D, E i F su točke presjeka danih pravaca. Napravimo skicu:



U skladu s uvodom, u ovom zadatku ćemo pretpostaviti da je trokut DEF jednakonstraničan. To znači da mu svi unutarnji kutovi imaju veličinu $60°$.

Promatrajmo trokut BA_1F. To je pravokutan trokut jer je $\angle FA_1B = 90°$. Također je $\angle A_1FB = 60°$ jer je to vršni kut unutarnjeg kuta jednakostraničnog trokuta. Stoga je $\angle FBA_1 = 30^\circ$.

Sada promatrajmo trokut A_1CE. Ovdje je $\angle CEA_1 = 60^\circ$ pa je $\angle A_1CE = 30^\circ$, a budući da je CC_1 simetrala kuta kod C, vrijedi $\angle BCA = 60^\circ$.

Do sad smo dobili $\angle FBA_1 = 30^\circ$ i $\angle BCA = 60^\circ$, a to su unutarnji kutovi trokuta BCB_1 pa preostaje $\angle CB_1B = 90^\circ$.

Dužina BB_1 je težišnica trokuta ABC, a budući da smo dobili da je okomita na $\overline{AC}$, trokut ABC mora biti jednakokračan i $|AB| = |BC|$. No, kut $\angle BCA$ ima veličinu 60° pa to znači da svi unutarnji kutovi trokuta ABC imaju veličinu 60° što znači da je to jednakostraničan trokut.

No, ako je trokut ABC jednakostraničan, tada se AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki što je kontradikcija s uvjetom da presjeci tih pravaca tiče novi trokut. Krenuli smo od pretpostavke da je $\triangle DEF$ jednakostraničan i došli do nečeg nemogućeg. Time smo dokazali da trokut DEF **nije jednakostraničan**.

Zadatak 3. Trokut ABC je jednakokračan ($|AB| = |AC|$), a točka D je na onom luku $\overset{\frown}{BC}$ trokutu opisane kružnice koji ne sadrži vrh A. Nadalje, točka E je sjecište pravca CD i okomice iz vrha A na taj pravac. Dokažite da vrijedi:

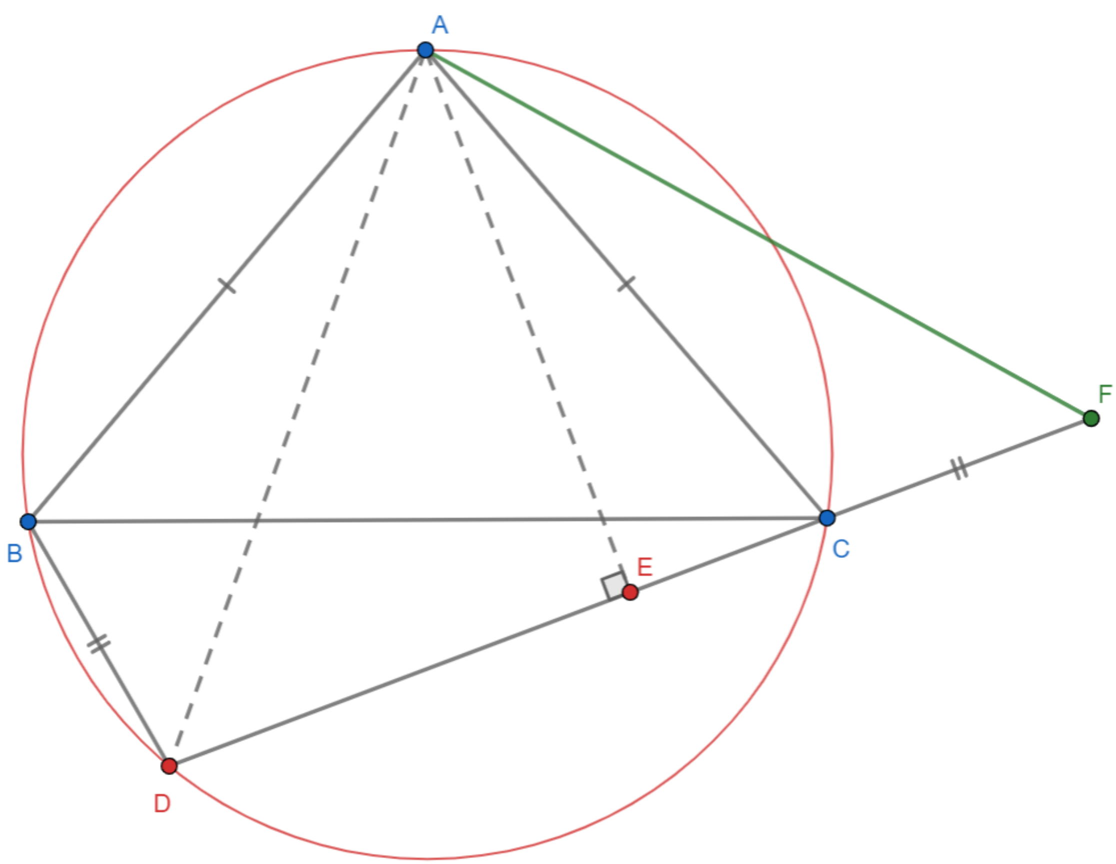
$$|BD| + |DC| = 2|DE|.$$

Rješenje. Ideja u ovakvim zadatcima gdje imamo zbroj duljina nekih dužina, a koje nisu na istom pravcu, je da ih nekako pokušamo nacrtati na istom pravcu. Transformirajmo malo traženu tvrdnju:

$$|BD| + |DC| = |BD| + |DE| + |EC|.$$

Budući da trebamo dokazati da je ovo jednako $2|DE|$, zapravo nam ostaje za dokazati $|BD| + |EC| = |DE|$. Kada bi duljinu $|BD|$ nadodali na pravac DC, tada bi nam sve što trebamo bilo na istom pravcu. Stoga produžimo pravac DC preko točke C za $|BD|$ i označimo dobivenu točku s F. Tada je $|EF| = |EC| + |CF| = |EC| + |BD|$. To znači da nam je cilj dokazati da je trokut ADF jednakokračan.

Nacrtajmo sada skicu:



Cilj je dokazati $|AD| = |AF|$, a kada želimo jednakost duljina stranica, obično tražimo sukladne trokute. Srećom, uz dobre oznake na skici naslućujemo sukladnost trokuta ABD i ACF. Potrebno je samo dokazati sukladnost kutova $\angle ABD$ i $\angle ACF$. Provedimo formalno cijeli dokaz.

Kutovi $\angle ABD$ i $\angle DCA$ su kutovi nad istom tetivom s različitih kružnih lukova pa su oni suplementarni, a budući da su kutovi $\angle DCA$ i $\angle ACF$ sukuti, slijedi $\angle ABD = \angle ACF$. Zbog jednakokračnosti trokuta ABC je $|AB| = |AC|$, a $|BD| = |CF|$ po konstrukciji.

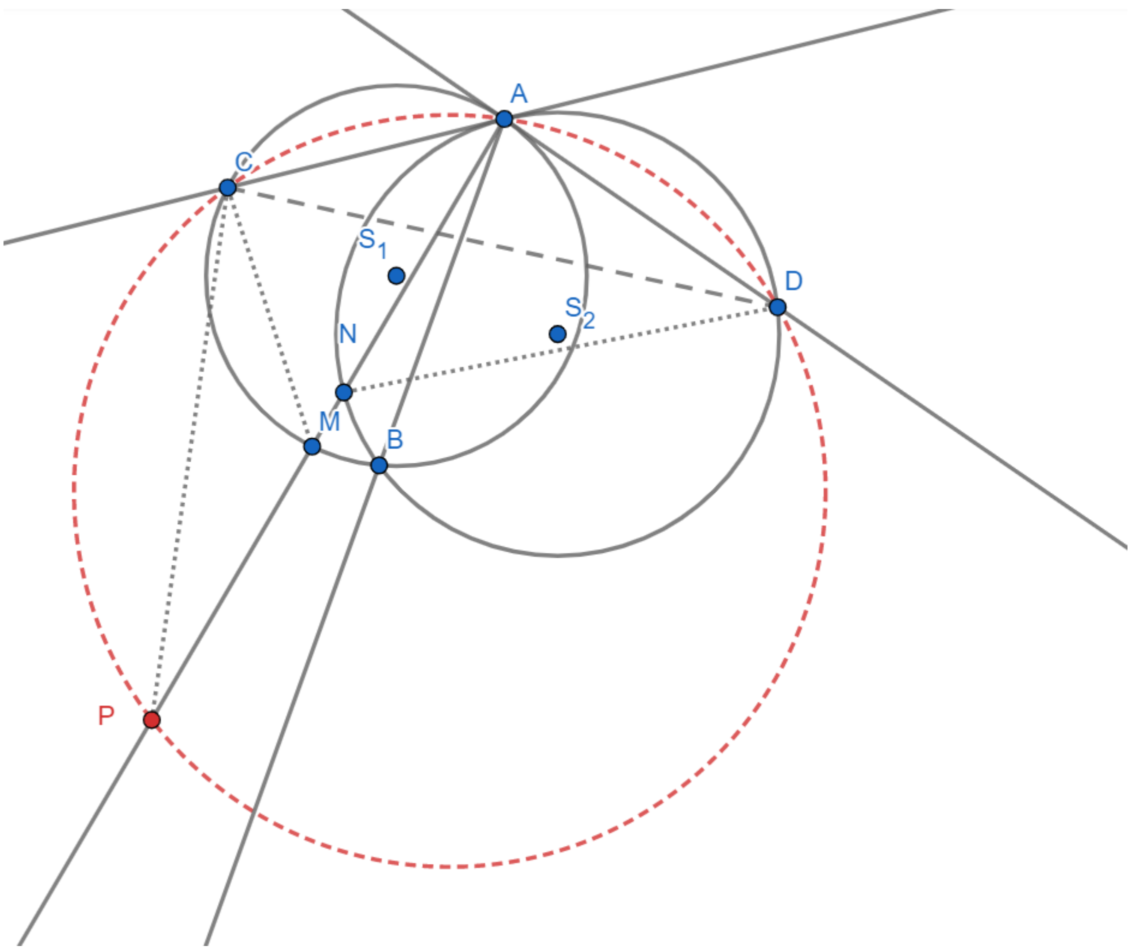
Prema SKS poučku o sukladnosti trokuta imamo da su trokuti ABD i ACF sukladni, odakle slijedi $|AD| = |AF|$. To znači da je trokut ADF jednakokračan s visinom $\overline{AE}$. Stoga je $|DE| = |EF| = |EC| + |CF|$. Konačno imamo:

$$\begin{aligned}
|BD| + |DC| &= |CF| + |DE| + |EC| \\
&= |DE| + (|EC| + |CF|) \\
&= |DE| + |EF| \\
&= |DE| + |DE| \\
&= 2|DE|,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Tangenta kružnice k_2 povučena iz točke A siječe kružnicu k_1 u točki C, a tangenta kružnice k_1 povučena iz točke A siječe kružnicu k_2 u točki D. Polupravac kroz točku A, koji leži unutar kuta $\angle CAD$, siječe kružnicu k_1 u točki M, kružnicu k_2 u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P. Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P.

Rješenje. Skica:



Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da polupravac kroz točku A pripada kutu $\angle BAC$. (za vježbu možete pokušati dokazati drugi slučaj).

Za rješavanje ovog zadatka se trebamo podsjetiti teorema o kutu između tetive i tangente.

Kut između tetive i tangente je jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

Imamo:

$$\begin{aligned}\angle CMP &= \angle MCA + \angle CAM && \text{vanjski kut trokuta } MAC.\\ &= \angle MAD + \angle CAM && \text{Teorem o kutu između tetive i tangente.}\\ &= \angle CAD\end{aligned}$$

Dalje imamo $\angle CPM = \angle CDA$ jer su to kutovi nad tetivom $\overline{AC}$ kružnice opisane trokutu ACD.

Prema K-K poučku o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti ACD i MCP slični pa je

$$\frac{|MC|}{|AC|} = \frac{|MP|}{|AD|}. \tag{1}$$

Nadalje, zbog teorema o kutu između tetive i tangente imamo $\angle ACM = \angle MAD = \angle NAD$ i $\angle CAM = \angle CAN = \angle ADN$.

Odavde slijedi (prema K-K poučku o sličnosti) da su trokuti ACN i DAN slični. Vrijedi:

$$\frac{|AN|}{|AD|} = \frac{|MC|}{|AC|}. \tag{2}$$

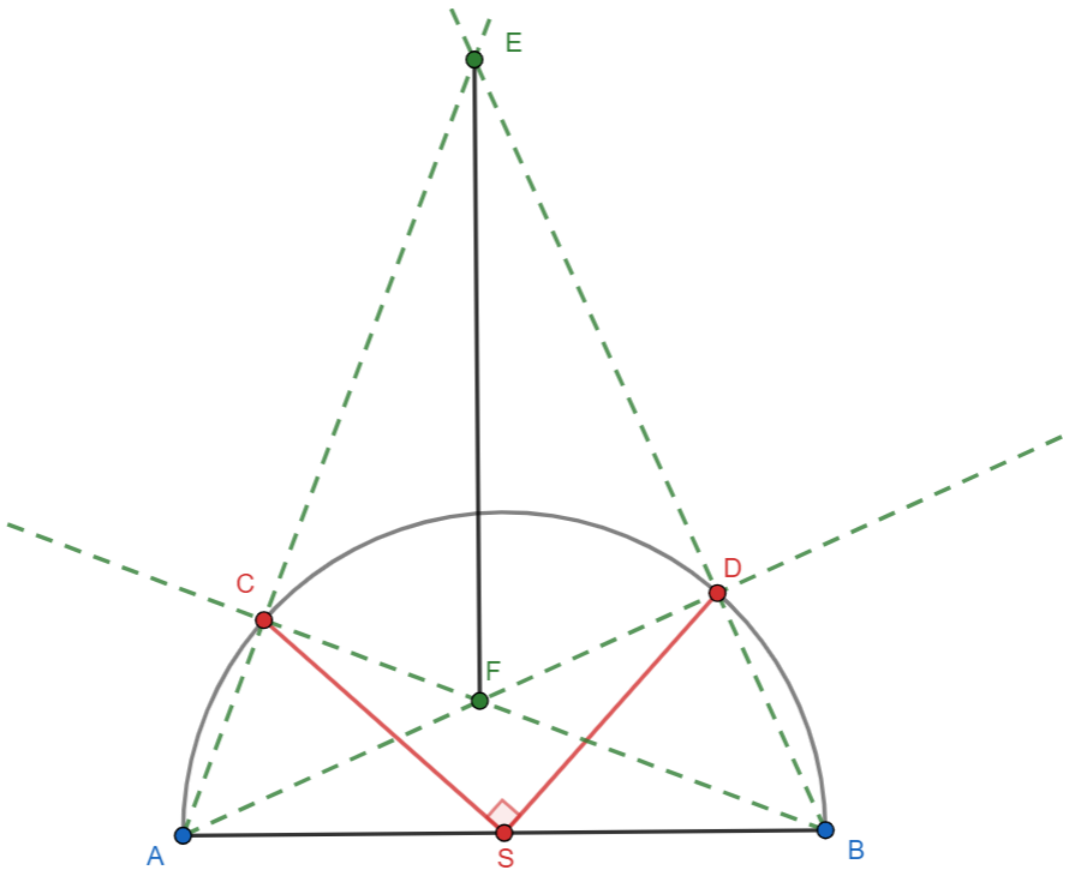
Iz (1) i (2) slijedi

$$\frac{|MP|}{|AD|} = \frac{|AN|}{|AD|},$$

odnosno $|MP| = |AN|$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 5. Dana je polukružnica nad promjerom $\overline{AB}$ i na njoj točke C i D tako da vrijedi da točka C pripada luku $\overset{\frown}{AD}$ i da je kut $\angle CSD$ pravi, pri čemu je S središte dužine AB. Neka je E sjecište pravaca AC i BD, a F sjecište pravaca AD i BC. Dokažite da je $|EF| = |AB|$.

Rješenje. Skica:



U ovom zadatku treba dokazati jednakost duljina nekih dužina što može značiti da treba tražiti sukladne trokute s tim stranicama. Ako ovdje dokažemo sukladnost trokuta ABC i EFC, tada bi slijedila tražena tvrdnja.

Budući da su točke D i C na kružnici (polukružnici), kutovi $\angle ACB$ i $\angle ADB$ su pravi (Talesov teorem). To ujedno znači da su $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ visine trokuta ABE. Budući da se one sijeku u točki F, ona je zapravo ortocentar tog trokuta, a budući da i EF prolazi kroz F, slijedi $EF \perp AB$.

Prema teoremu o središnjem i obodnom kutu slijedi $\angle CAD = 45^\circ$. Trokut ACF je pravokutan pa sada zaključujemo da je jednakokračan pravokutan i $|AC| = |CF|$.

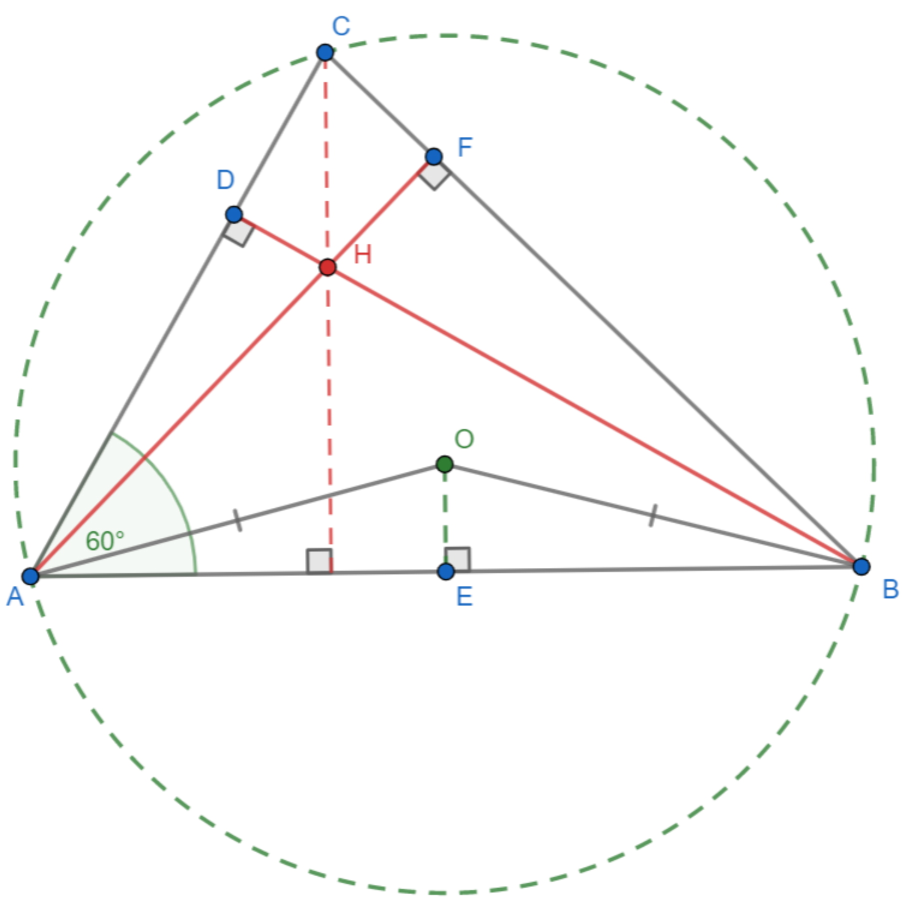
Također je i $\angle FCE = 90^\circ = \angle ACB$ i $\angle EFC = \angle BAC$ (jer su to kutovi s okomitim kracima) pa slijedi sukladnost trokuta ABC i FEC prema KSK poučku o sukladnosti.

Odavde je $|AB| = |EF|$, što je i trebalo dokazati.

Geometrija - mix

Zadatak 1. Ako je H ortocentar, a O središte opisane kružnice trokuta ABC, tada je $\angle BAC = 60^\circ$ ako i samo ako je $|AH| = |AO|$. Dokažite!

Rješenje. Neka su D i F nožišta visina iz točaka B i A na $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom, a E nožište visine iz točke O na $\overline{AB}$. Skica:



Ako u zadatku imamo izraz „ako i samo ako", to znači da treba dokazati tvrdnju ekvivalencije. U ovom zadatku to znači da prvo treba pretpostaviti da vrijedi $\angle BAC = 60^\circ$ i dokazati da je $|AH| = |AO|$. Nakon toga se treba vratiti na početak, pretpostaviti da vrijedi $|AH| = |AO|$ i dokazati da je $\angle BAC = 60^\circ$.

Pretpostavimo najprije da je $\angle BAC = 60^\circ$. Treba dokazati jednakost duljina nekih stranica pa bi bilo dobro da, ako je moguće, dokažemo sukladnost trokuta koji sadržavaju te stranice.

Prvo promatrajmo trokut ABO. To je jednakokračan trokut jer je O središte opisane kružnice pa je $|AE| = \frac{1}{2}|AB|$.

Promatrajmo trokut ABD. To je pravokutan trokut sa unutarnjim kutovima veličina $30°$, $60°$ i $90°$ pa je $|AD| = \frac{1}{2}|AB|$, odnosno imamo $|AE| = |AB|$.

Dalje, trokut AFC je pravokutan pa je $\angle FAC = 90 - \angle ACB$.

Zbog teorema o središnjem i obodnom kutu, vrijedi da je $\angle AOB = 2\angle ACB$, odakle je $\angle EOA = \angle ACB$ (jer je $\triangle AOB$ jednakokračan) i još $\angle OAE = 90 - \angle ACB$. Sve zajedno, $\angle FAC = \angle OAE$.

Još imamo $\angle HDA = \angle OEA = 90°$. Prema KSK poučku o sukladnosti zaključujemo da je trokut HDA sukladan trokutu OEA odakle slijedi $|OA| = |AH|$.

Sada preostaje dokazati drugi smjer. Pretpostavimo da je $|AH| = |AO|$. Treba dokazati da je $\angle BAC = 60°$.

Prvo promatramo trokut AFC. Odavde je $\angle FAC = 90 - \angle ACB$ i odavde slijedi $\angle DHA = \angle ACB$.

Prema teoremu o obodnom i središnjem kutu je $\angle BOA = 2\angle ACB$ pa je odavde $\angle EOA = \angle ACB$.

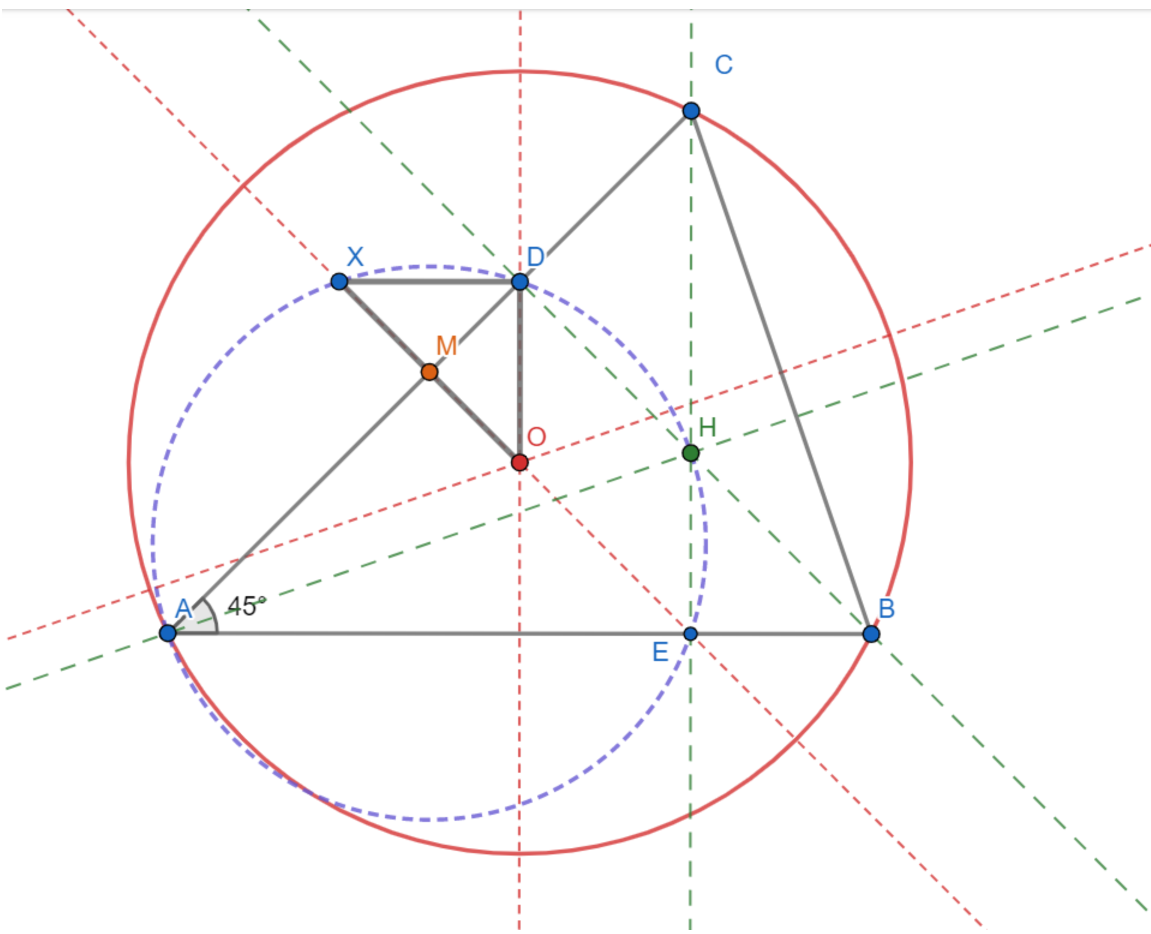
Zbog toga što je trokut ABO jednakokračan imamo $\angle OAB = \angle ABO = 90° - \angle ACB$.

Početna pretpostavka je bila $|AH| = |AO|$ pa slijedi sukladnost trokuta AOE i AHD te $|AD| = |AE| = \frac{1}{2}|AB|$.

Budući da je trokut BDA pravokutan, i $|AD| = \frac{1}{2}|AB|$, slijedi da su veličine unutarnjih kutova trokuta BDA $30°$, $60°$ i $90\circ$, tj. $\angle BAC = 90°$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 2. U šiljastokutnom trokutu ABC, $\angle BAC = 45°$. Točke O i H su središte opisane kružnice i ortocentar trokuta ABC, redom. Točka D je nožište visine iz vrha B. Točka X je polovište luka $\overset{\frown}{AH}$ kružnice opisane trokutu AHD koji sadrži D. Dokažite da je $|DX| = |DO|$.

Rješenje. Ovo je rješenje koje je ponudio polaznik tečaja MetaMath **zaq**. Mi ćemo ga samo dopuniti skicom.



Neka je E nožište visine iz C na AB. Kako je $\angle AEH = 90°$, znamo da E leži na opisanoj kružnici trokuta AHD.

Kako je to onda ujedno i opisana kružnica trokuta AHE, znamo da X leži na polovištu luka nasuprotnog točki E, tj. da X leži na simetrali kuta AEH. Zato je $\angle XEA = 45°$.

Označimo $M = XE \cap AC$. Sada iz trokuta AEM zaključujemo

$\angle AME = 90°$. Također imamo da je $\angle MCE = 45°$, a kako $\triangle AEM$ i $\triangle ECM$ dijele stranicu $\overline{EM}$, zaključujemo da je $\triangle AEM \cong \triangle ECM$. Posebno, vrijedi $|AM| = |MC|$.

Međutim, onda je EM simetrala stranice $\overline{AC}$ pa znamo da je $O \in \overline{EM}$ (jer je $\triangle ABC$ šiljastokutan). Kako je $\angle ADB = 90°$, iz trokuta ABD slijedi $\angle ABD = 45°$. Dakle, $\triangle ADB$ je jednakokračan.

Neka je N polovište stranice $\overline{AB}$. S jedne strane, znamo da je $DN \perp AB$, a s druge da je $ON \perp AB$. Zaključujemo da je $O \in DN$. Posebno, $DO \perp AB$ pa je $DO \parallel CE$.

Kako se trokuti MDO i MEC prostiru na dva zajednička pravca, a treće strane su im paralelne, zaključujemo da je $\triangle MDO \sim \triangle MEC$. Slijedi da je $\angle MOD = \angle MDO = 45°$.

Ranije smo ustanovili da su točke A, E, H, D, X konciklične. Sada iz teorema o tetivnom četverokutu primjenjenom na $AEDX$ slijedi $\angle XDM = \angle XDA = \angle XEA = 45°$ i $\angle DXM = \angle DXE = \angle DAE = 45°$. Sada vidimo da se $\triangle XMD$ i $\triangle ODM$ podudaraju u svim kutovima.

Kako oni također dijele stranicu $\overline{MD}$, slijedi $\triangle XMD \cong \triangle ODM$, a posebno $|DX| = |DO|$.