Zadatak 1.

Od pet brojeva prva tri čine aritmetički niz s razlikom 8, a posljednja četiri čine geometrijski niz s kvocijentom 2. O kojim se brojevima radi?

Rješenje. Označimo brojeve redom x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Budući da prva tri broja čine aritmetički niz s razlikom 8 možemo ih zapisati kao

$$x_1 = x - 8, \quad x_2 = x, \quad x_3 = x + 8.$$

Brojevi x_2, x_3, x_4, x_5 čine geometrijski niz s kvocijentom 2, pa, uvažujući prijašnju oznaku $x_2 = x$, ih možemo zapisati kao

$$x_2 = x, \quad x_3 = 2x, \quad x_3 = 4x, \quad x_5 = 8x.$$

Stoga vrijedi $x_3 = x + 8$ i $x_3 = 2x$ iz čega slijedi $2x = x + 8$, odnosno $x = 8$. Slijedi da su traženi brojevi $0, 8, 16, 32, 64$.

★

Zadatak 2.

Duljine stranica trokuta a, b, c su tri uzastopna člana aritmetičkog niza, a duljine visina na te stranice, v_a, v_b, v_c, istim su redom tri uzastopna člana geometrijskog niza. Ako su duljine stranica dvoznamenkasti prirodni brojevi, koje sve vrijednosti može poprimiti opseg tog trokuta?

Rješenje. Označimo li sa d razliku aritmetičkog niza čiji su članovi stranice trokuta slijedi da dane stranice možemo zapisati kao $a = b - d$ b, $c = b + d$.

Označimo li sa P površinu tog trokuta slijedi da su duljine visina tog trokuta

$$v_a = \frac{2P}{b-d}, \quad v_b = \frac{2P}{b}, \quad v_c = \frac{2P}{b+d}.$$

Budući da su to tri uzastopna člana geometrijskog niza, a u svakom geometrijskom nizu (q_n) za svaki $n \geq 2$ vrijedi $q_n^2 = q_{n-1} \cdot q_{n+1}$, slijedi da je

$$\begin{aligned}
v_b^2 &= v_a \cdot v_c \\
\left(\frac{2P}{b}\right)^2 &= \frac{2P}{b-d} \cdot \frac{2P}{b+d} \\
\frac{1}{b^2} &= \frac{1}{b-d} \cdot \frac{1}{b+d} \\
b^2 &= (b-d) \cdot (b+d) \\
b^2 &= b^2 - d^2 \\
d^2 &= 0 \\
d &= 0.
\end{aligned}$$

Dakle, razlika članova aritmetičkog niza jednaka je 0, pa je taj niz konstantan. Slijedi da je trokut jednakostraničan. Budući da je duljina stranice bilo koji dvoznamenkasti prirodan broj slijedi da su svi mogući opsezi tog trokuta opisani sa

$$\begin{aligned}
O_k &= 3a_k \\
&= 3 \cdot (10 + k) \\
&= 30 + 3k, \quad 0 \leq k \leq 89.
\end{aligned}$$

★

Zadatak 3.

Tri različita realna broja a, 2022 i b su tri uzastopna člana geometrijskog niza. Ako su brojevi $a+2022$, $b+2022$ i $a+b$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza, odredite brojeve a i b.

Rješenje. Kako su a, 2022 i b uzastopni članovi geometrijskog niza, a u svakom geometrijskom nizu (q_n) vrijedi $q_n^2 = q_{n-1}q_{n+1}$, slijedi da je

$$2022^2 = ab. \tag{1}$$

Slično, iz činjenice da su $a+2022$, $b+2022$ i $a+b$ uzastopni članovi aritmetičkog niza slijedi da je

$$\begin{aligned}(a+2022)+(a+b) &= 2(b+2022)\\ b &= 2a-2022.\end{aligned}$$

Uvrstimo li dobiveno u (1) dobivamo da je

$$\begin{aligned}a\cdot b &= 2022^2\\ a\cdot(2a-2022) &= 2022^2\\ 2a^2-2022a-2022^2 &= 0\\ a^2-1011a-1011^2 &= 0\end{aligned}$$

Sada rješimo kvadratnu jednadžbu

$$\begin{aligned}a_{1,2} &= \frac{1011 \pm \sqrt{(-1011)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1011)^2}}{2}\\ &= \frac{1011 \pm 3\cdot 1011}{2}\\ &= -1011, 2022.\end{aligned}$$

Primjetimo da $a = 2022$ po uvjetu zadatka ne može biti rješenje (jer tada brojevi a, 2022 i b nisu različiti). Stoga je $a = -1011$. Uvrstimo li to u $b = 2a - 2022$ dobivamo da je $b = -4044$.

★

Zadatak 4.

Tri broja čine rastući aritmetički niz. Ako drugi broj uvećamo za 1, a treći za 10, niz postaje geometrijski. Ako je najmanji od ta tri broja jednak 2, koji su to brojevi?

Rješenje. Označimo razliku tog aritmetičkog niza sa d. Primjetimo da je broj d strogo veći od 0 budući da je niz rastući. Kako je zadano da je prvi član tog niza jednak 2 slijedi da su tri broja koji čine aritmetički niz brojevi oblika $a_1 = 2, a_2 = 2 + d, a_3 = 2 + 2d$.

Geometrijski niz pak čine brojevi

$$q_1 = a_1 = 2, \quad q_2 = a_2 + 1 = 3 + d, \quad q_3 = a_3 + 10 = 12 + 2d.$$

Budući da u svakom geometrijskom nizu za svaka uzastopna tri člana q_{n-1}, q_n, q_{n+1} vrijedi jednakost $q_n^2 = q_{n-1}q_{n+1}$ slijedi da je

$$\begin{aligned} q_2^2 &= q_1 q_3 \\ (3+d)^2 &= 2 \cdot (12 + 2d) \\ d^2 + 2d - 15 &= 0. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} d_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 8}{2} \\ &= -5, 3. \end{aligned}$$

Rješenje $d = -5$ odbacujemo budući da broj d mora biti pozitivan. Dakle je $d = 3$ pa dobivamo

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_2 &= 2 + d = 5, \\ a_3 &= 2 + 2d = 8. \end{aligned}$$

Stoga su traženi brojevi $2, 5, 8$.

★

Zadatak 5.

U rastućem aritmetičkom nizu (a_n) umnožak drugog i trećeg člana je 3, a umnožak trećeg i petog je -3. Koliko prvih članova niza treba zbrojiti da bi taj zbroj bio minimalan?

Rješenje. Označimo razliku tog niza sa d. Tada je $a_n = a_1 + d(n-1)$, pa su uvjeti iz zadatka

$$(a_1 + d)(a_1 + 2d) = 3 \quad \text{i} \quad (a_1 + 2d)(a_1 + 4d) = -3.$$

Podijelimo li drugu jednadžbu s prvom dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{(a_1 + 2d)(a_1 + 4d)}{(a_1 + d)(a_1 + 2d)} &= \frac{-3}{3} \\ \frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} &= -1 \\ a_1 &= -\frac{5}{2}d. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $a_1 = -\frac{5}{2}d$ u prvi uvjet dobivamo

$$\begin{aligned} \left(-\frac{5}{2}d + d\right)\left(-\frac{5}{2}d + 2d\right) &= 3 \\ \left(-\frac{1}{2}d\right)\left(\frac{-3}{2}d\right) &= 3 \\ d^2 &= 4 \\ d &= \pm 2. \end{aligned}$$

Budući da je niz rastući rješenje $d = -2$ odbacujemo. Dakle, jedino rješenje je $d = 2$. Slijedi da je

$$a_1 = -\frac{5}{2}d = -5.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$\begin{aligned} S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ &= n \cdot \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \\ &= na_1 + d \cdot \frac{(n-1)n}{2}, \end{aligned}$$

pa je u našem slučaju

$$\begin{aligned} S_n &= -5n + 2\frac{(n-1)n}{2} \\ &= n^2 - 6n \\ &= n^2 - 6n + 9 - 9 \\ &= (n-3)^2 - 9. \end{aligned}$$

Budući da je izraz $(n-3)^2$ nenegativan za svaki prirodan broj te je jednak nuli za $n=3$ zaključujemo da je zbroj prva tri člana danog niza minimalan.

★

Zadatak 6.

Dan je niz (a_n) koji čiji članovi zadovoljavaju rekurzivnu formulu

$$a_n = 2 + a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Ukoliko je $a_0 = 3$ dokažite da su svi članovi tog niza u parovima relativno prosti brojevi.

Rješenje. Tvrdnju zadatka dokazat ćemo metodom kontradikcije. Pretpostavimo suprotno: postoje $m > n \geq 0$ takvi da članovi niza a_m i a_n nisu relativno prosti. Dakle, postoji $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$, takav da $k \mid a_m$ i $k \mid a_n$. Iz dane rekurzije za broj m dobivamo da je

$$a_m - 2 = a_0 \cdot a_q \cdot \ldots a_n \cdot \ldots \cdot a_{m-1}.$$

Budući da k dijeli a_n slijedi da k dijeli i čitavu desnu stranu. Zbog toga dijeli i lijevu stranu, pa kako dijeli a_m slijedi da mora dijeliti i 2. Stoga je jedina mogućnost $m = 2$. Ukoliko pokažemo da su svi članovi niza neparni otpast će i ta mogućnost. Dakle, ako su svi članovi tog niza neparni pretpostavka nam je bila kriva, pa su članovi tog niza u parovima relativno prosti.

Tvrdnju da su svi članovi tog niza neparni brojevi pokazujemo principom matematičke indukcije.

Baza indukcije Budući da je $a_0 = 3$ neparan, baza indukcije je zadovoljena.

Korak indukcije Neka je $n \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki $1 \leq k \leq n$.

Korak indukcije Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za $n + 1$.

Pretpostavimo da je a_{n+1} paran. Tada iz rekurzivne relacije slijedi $2 \mid (2 + a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$, pa dobivamo da $2 \mid a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ pa kako je 2 prost broj slijedi da dijeli barem jedan a_k. No to po pretpostavci indukcije nije moguće budući da su svi a_k neparni brojevi. Dakle, a_{n+1} je paran broj.

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da je a_n neparan za svaki $n \geq 0$.

★