Zadatak 1.

Neka je C realan broji i neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva. Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Pretpostavimo da za svaka tri međusobno različita broja i, j, k vrijedi

$$(i-j)M_k + (j-k)M_i + (k-i)M_j = C.$$

Dokažite da su nizovi (M_n) i (a_n) aritmetički.

Rješenje. Uvrstimo li trojke $(i,j,k) = (1,2,3)$ i $(i,j,k) = (2,1,3)$ u danu jednadžbu dobivamo da je

$$-M_3 - M_1 + 2M_2 = C = M_3 - 2M_2 + M_1,$$

odnosno da je $C = -C$ pa slijedi da je $C = 0$. Sada uvrštavanjem trojke $(i,j,k) = (n-1, n, n+1)$ dobivamo da je

$$-M_{n+1} - M_{n-1} + 2M_n = 0,$$

odnosno

$$2M_n = M_{n-1} + M_{n+1},$$

što pokazuje da je niz (M_n) aritmetički.

Dakle, postoje realni brojevi m i d takvi da za svaki prirodan broj vrijedi $M_n = m + dn$. Primjetimo da vrijedi $nM_n - (n-1)M_{n-1} = a_n$. Uvrštavanjem izraza za članove niza (M_n) i sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} a_n &= n(m+dn) - (n-1)[m + d(n-1)] \\ &= nm + dn^2 - nm - dn^2 + dn + m + dn - d \\ &= (m-d) + (2d)n, \end{aligned}$$

pa je i niz (a_n) aritmetički.

★

Zadatak 2.

Odredi zbroj prvih 9999 članova niza

$$a_n = \frac{1}{n^2+n}, \quad n \geq 1$$

Rješenje. Primjetimo kako za opći član niza imamo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^2+n} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n+1-n}{n(n+1)} \\ &= \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Stoga je suma S_n prvih n članova tog niza jednaka

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Sada dobivamo

$$S_{9999} = 1 - \frac{1}{10000} = \frac{9999}{10000}.$$

★

Zadatak 3.

Neka je $b_0, \ldots b_{1011}$ konačan niz brojeva čiji je k-ti član jednak $b_k = 2a_{2k}$, gdje je a_k koeficijent uz x^k polinoma $p(x) = (x+1)^6(x+2)^6 \ldots (x+337)^6$. Izračunajte

$$S = \sqrt[6]{b_0 + \ldots + b_{1011}}.$$

Rješenje. Zapišimo polinom p pomoću koeficijenata

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n. \tag{1}$$

Budući da je $p(x) = (x+1)^6(x+2)^6 \ldots (x+337)^6$ slijedi da je stupanj tog polinoma jednak $n = 337 \cdot 6 = 2022$.

Primjetimo da evaluiranje uvrštavanjem $x = 1$ i $x = -1$ u (1) dobivamo

$$\begin{aligned} p(1) &= a_0 + a_1 + \ldots - a_{2021} + a_{2022} \\ p(-1) &= a_0 - a_1 + \ldots - a_{2021} + a_{2022}. \end{aligned}$$

Zbrajanjem tih jednakosti slijedi

$$p(1) + p(-1) = 2a_0 + 2a_4 + \ldots + 2a_{2022},$$

a kako je $b_k = 2a_{2k}$ dobivamo da je

$$b_0 + \ldots + b_{1011} = p(1) + p(-1).$$

Iz teksta zadatka sada vidimo da je

$$S = \sqrt[6]{p(1) + p(-1)},$$

pa za izračunati rješenje preostaje još direktno odrediti vrijednosti $p(1)$ i $p(-1)$.

Uvrštavanjem $x = 1$ u izraz dan u zadatku dobivamo

$$p(1) = (1+1)^6(1+2)^6 \ldots (1+337)^6 = 2^6 \cdot 3^6 \cdot \ldots \cdot 338^6 = (338!)^6.$$

Uvrstimo li pak $x = -1$ prvi faktor jednak je $(-1+1)^6 = 0$ pa je i $p(-1) = 0$. Slijedi da je rješenje

$$\begin{aligned} S &= \sqrt[6]{p(1) + p(-1)} \\ &= \sqrt[6]{(338!)^6 + 0} \\ &= 338! \end{aligned}$$

★

Zadatak 4.

Neka je $n \geq 2$ prirodan broj i neka su $a_0, \dots a_n$ uzastopni članovi aritmetičkog niza. Dokažite da vrijedi

$$a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \ldots + (-1)^k \binom{n}{k} a_k + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} a_n = 0.$$

Rješenje. Budući da je niz a_n aritmetički imamo $a_n = a_0 + dn$, $n \in \mathbb{N}$, za neki $d \in \mathbb{R}$. Slijedi da je

$$\begin{aligned}
S &= a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} a_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (a_0 + dk) \\
&= a_0 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} + d \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} \\
&= a_0 \cdot S_1 + s \cdot S_2.
\end{aligned}$$

Imamo

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 1^{n-k} \\
&= (-1+1)^n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

U općem sumandu u S_2 željeli bismo eliminirati k tako da i na S_2 možemo primjeniti binomni teorem. Za to ćemo broj $k\binom{n}{k}$ interpretirati na dva načina.

Zamislimo da imamo razred s n učenika. Od tih n učenika biramo njih k koji će predstavljati razred na nogometnom natjecanju, a zatim od tih k učenika biramo jednog koji će biti kapetan ekipe.

To možemo napraviti na

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{1} = \binom{n}{k} \cdot k = k \binom{n}{k}$$

načina.

Taj odabir mogli smo napraviti i na sljedeći način: najprije od n učenika u razredu biramo jednog koji će biti kapetan ekipe, a zatim od preostalih $(n-1)$ biramo $(k-1)$ učenika koji će također igrati u ekipi. To možemo napraviti na

$$\binom{n}{1} \cdot \binom{n-1}{k-1} = n \binom{n-1}{k-1}$$

način.

Budući da se ta dva broja moraju podudarati slijedi da vrijedi

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Iskoristimo li taj rezultat dobivamo

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k n\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n-1}{k-1} \\
&= -n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n-1}{k} \\
&= -n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k \cdot 1^{n-1-k} \\
&= -n \cdot (-1+1)^{n-1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dobili smo da su S_1 i S_2 oba jednaka nuli, pa je konačno

$$S = a_0 S_1 + d S_2 = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

★

Zadatak 5.

Neka je u prostoru dano n ravnina koje sve prolaze jednom točkom O, ali nikoje tri ne sadrže isti pravac i neka je D_n broj dijelova na koje te ravnine dijele prostor. Dokažite da je svaki član niza (D_n) paran broj.

Rješenje. Promatramo broj dijelova D_{n-1} i n-tu ravninu. Budući da svaka od prvih $(n-1)$ ravnina siječe n-tu ravninu siječe po pravcu koji prolazi točkom O i jer se nikoja od tih $(n-1)$ pravaca ne poklapaju (da se poklapaju tri ravnine bi sadržavale isti pravac) slijedi da prvih $(n-1)$ ravnina dijeli n-tu ravninu na $2(n-1)$ dijelova. Dakle se dodavanjem n-te ravnine broj dijelova prostora D_{n-1} povećao za $2(n-1)$.

Iz gornje diskusije zaključujemo da za $n \geq 2$ vrijedi

$$D_n = D_{n-1} + 2(n-1).$$

Očito imamo $D_1 = 2$.

Zbrajanjem prvih n članova tog niza dobivamo

$$\begin{aligned}
D_1 + D_2 + \ldots + D_{n-1} + D_n &= 2 + (D_1 + 2) + \ldots + [D_{n-2} + 2(n-2] + [D_{n-1} + 2(n-1)] \\
D_n &= 2 + 2 + \ldots + 2(n-2) + 2(n-1) \\
&= 2 + 2[1 + \ldots + (n-2) + (n-1)] \\
&= 2 + 2\frac{(n-1)n}{2} \\
&= n^2 - n + 2.
\end{aligned}$$

Primjetimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
D_n &= n^2 - n + 2 \\
&= n(n-1) + 2.
\end{aligned}$$

Točno jedan od brojeva n i $n-1$ je paran za svaki $n \in \mathbb{N}$. Slijedi da $2 \mid n(n-1)$ pa po gornjoj formuli vrijedi i $2 \mid D_n$.

Napomena. Činjenica da je svaki član niza paran mogla se dokazati i korištenjem principa matematičke indukcije iz podataka

$$D_n = D_{n-1} + 2(n-1), \quad D_1 = 2.$$

★