Metamath - Tetivni četverokuti i potencija točke

David Mikulčić

14.11.2022

1 Uvod

Dobrodošli na još jedan tečaj iz geometrije! Ovotjedna tema je **Potencija točke i tetivni četverokuti**.

Kao što možete pretpostaviti, postoji online MNM predavanje Tetivni četverokuti i Potencija točke koje bi svakako trebali proučiti ukoliko se prvi put susrećete sa ovim pojmovima, no i općenito će vam pomoći kako bi lakše riješili pojedine zadatke.

Premda se čini kako obrađujemo dvije teme pod jednom, ove dvije teme su dosta povezane, što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru.

2 Primjeri

1. *Dana je kružnica k te točka T izvan nje. Kroz T su povučena dva pravca koji sijeku danu kružnicu u A i B, odnosno C i D. Dokažite da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.*

   Rješenje.

   Sa MNM predavanja 1.zadatak:
   Neka su točke A, B, C i D vrhovi četverokuta tim redom. Trokuti $\triangle TAD$ i $\triangle TCB$ imaju zajednički kut pri T te su kutevi $\angle TAD$ i $\angle TCB$ jednaki jer je četverokut tetivan. Naime, $\angle TAD = 180° - \angle BAD = \angle BCD$. Sada slijedi da su ta dva trokuta slična pa imamo $\frac{|TA|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TB|}$, iz čega dobivamo $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

   Napomena.

   1) Neke oznake koje se koriste za potenciju točke X na kružnicu k: $(X, k), \text{Pow}(X, k)$.

   2) Ukoliko bi pomicali sekantu TC, tj. približavali točke C i D te naposlijetku dobili tangentu iz točke T na kružnicu k ($C \equiv D$)

   $$\implies \text{Pow}(T, k) = TC \cdot TD = TC^2,$$

što drugačije možemo zapisati, koristeći Pitagorin poučak,

$$\text{Pow}(T,k) = |TO|^2 - r^2,$$

gdje je O središte k te r pripadni radijus, izraz može biti negativan ukoliko T bude unutar kružnice.

3) Sličan dokaz vrijedi i za T unutar kružnice, dok $T \in k \implies \text{Pow}(T,k) = 0$.

4) Naime, vrijedi i obrat, ukoliko vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ (i T je na dužinama AB i CD ili T nije na nijednoj od njih) onda je četverokut $ABCD$ tetivan, tj. postoji kružnica na kojoj se te točke nalaze.

2. *Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se sijeku u točkama A i B. Dokažite da je pravac AB geometrijsko mjesto svih točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice.*

   Rješenje.

   MNM predavanja 5.zadatak

   Neka je P proizvoljna točka na AB, tada $(P,k_1) = PA \cdot PB = (P,k_2)$, čime smo dokazali da sve točke na pravcu imaju jednaku potenciju na obje kružnice.

   Pretpostavimo da postoji točka Q koja se ne nalazi na AB takva da ima jednaku potenciju na obje kružćnice, tada pravac PB siječe k_1 i k_2 u C i D (različite od A, $|CD| > 0$), redom. No sada imamo

   $$(Q,k_1) = (Q,k_2) \implies QC \cdot QB = QD \cdot QB \implies QC = QD,$$

   što daje kontradikciju (budući da se Q ne nalazi između C i D) te time i tvrdnju zadatka.

3. Dokaži da u trokutu ABC postoji središte opisanog opisa. Odnosno, da postoji točka O tako da je $|OA| = |OB| = |OC|$.

   Rješenje.

   Konstruirajte kružnicu polumjera nula (!) sa središtem u A i označite je s ω_A. Definiramo ω_B i ω_C slično. Budući da centri nisu kolinearni, možemo pronaći njihovo radikalno središte O (Vidi zadatak 10. MNM predavanje).

   Sada znamo da su potencije od O do svakog od $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ jednake.

   Preformulirano, (kvadrat) duljine "tangenti" na svaku kružnicu su jednake: to jest, $|OA|^2 = |OB|^2 = |OC|^2$.

   (Da vidite da je $|OA|^2$ stvarno potencija točke, samo upotrijebite $\text{Pow}(O,\omega_A) = |OA|^2 - 0^2 = |OA|^2$.) Odavde izvodimo da je $|OA| = |OB| = |OC|$, kako se i tražilo.

3 Tetivni, pot točke - lakši zadaci

4. *Dana je kružnica sa središte O te tetivom BD. Na tetivi je odabrana točka E takva da je $|BE| = 5, |DE| = 3$. Presjek EO sa kraćim lukom BD je točka C. Ako je $|CE| = 1$, koliko je radijus kružnice?*

   Rješenje.

   Neka je A točka drugog presjeka OC sa kružnicom.

   Tada promotrimo potenciju točke E na danu kružnicu,

$$|EB| \cdot |ED| = |EC| \cdot |EA|$$

   računanjem i uvrštavanjem (označimo $R = |OA|$):

$$5 \cdot 3 = 1 \cdot (2R - 1)$$

   iz čega lako dobiti $R = 8$.

5. *Dijagonale tetivnog četverokuta su međusobno okomite i dijele ga na četiri trokuta. Dokažite da visina svakog od tih trokuta i težišnica njemu nasuprotnog trokuta, povučene iz sjecišta dijagonala, leže na istom pravcu.*

   Rješenje.

   Županijsko natjecanje 1999 SŠ1 1

6. *Neka je ABC trokut i promotrimo točku P u njegovoj unutrašnjosti. Pretpostavimo da je BC tangenta na opisane kružnice trokuta ABP i ACP. Dokažite da se polupravac AP raspolavlja $\overline{BC}$.*

   Rješenje.

   Neka je $X := AP \cap BC$.

   Promotrimo potenciju točke X na opisanu kružnicu trokut ABP:

$$|XA| \cdot |XP| = |XB|^2,$$

   budući da je XB tangenta na tu opisanu kružnicu.

   Slično, ako napišemo potenciju točke X na opisanu kružnicu trokuta ACP:

$$|XA| \cdot |XP| = |XC|^2.$$

   Sada lako vidimo da vrijedi $|XB|^2 = |XC|^2 \implies |XB| = |XC|$, što smo trebali i dokazati.

7. *Točka P je polovište dužine $\overline{AB}$ duljine 2. Neka je T diralište tangente iz točke A na kružnicu promjera $\overline{PB}$. Odredi duljinu $|PT|$.*

   Rješenje.

   Županijsko natjecanje iz matematike 2019, SŠ2 4

   Drugo rješenje.

   Neka je T' preslika T preko središta kružnice O, tada je O polovište promjera TT' te točka P dijeli AO u omjeru $2:1$ pa zaključujemo da je P težište $\triangle ATT'$.

   Nadalje, označimo drugi presjek AT' i kružnice sa R te polovište $\overline{AT'}$ sa S. Promotrimo potenciju točke A na kružnicu:

$$AP \cdot AB = AT^2,$$

   pa slijedi da je $AT = \sqrt{2}$. Koristimo pitagoru u $\triangle ATT'$ kako bi dobili $AT' = \sqrt{3}$.

   Ponovnim promatranjem potencije točke A na kružnicu dobivamo,

$$AD^2 = AR \cdot AT',$$

   iz čega dobivamo $AR = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, stoga je $ST' = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ te $SR = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

   Primjenom Euklidovog poučka u pravokutnom $\triangle ATT'$ ($v^2 = pq$) imamo

$$TR^2 = AR \cdot RT' = \frac{2}{3}.$$

   Konačno, iz Pirtagorinog poučka u $\triangle SRT$ slijedi da $TS^2 = TR^2 + SR^2 \implies TS = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pa budući da je P težište, $PT = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. *Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan. Kružnica promjera $\overline{AB}$ siječe (produženu) visinu $\overline{CC'}$ u M i N. Kružnica promjera $\overline{AC}$ siječe (produženu) visinu $\overline{BB'}$ u P i Q. Dokaži da M, N, P i Q leže na istoj kružnici (konciklične).*

   Rješenje.

   USAMO 1990/5

4 Tetivni, pot točke - teži zadaci

9. *Na stranicama $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ trokuta ABC dane su točke A_1, B_1, C_1 takve da se AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u točki X te vrijedi $\angle AA_1C = \angle BB_1A = \angle CC_1B$. Dokaži da je X ortocentar $\triangle ABC$.*

Rješenje.

Uočimo da dana jednakost kuteva implicira tetivnost četverokuta XA_1CB_1, XB_1AC_1 i XC_1BA_1.

Promotrimo potenciju točke A na (XA_1CB_1) i XC_1BA_1. Iz prve dobivamo:

$$|AC_1| \cdot |AB| = |AX| \cdot |AA_1|,$$

te iz druge

$$|AB_1| \cdot |AC| = |AX| \cdot |AA_1|.$$

Kombiniranjem dobivamo $|AC_1| \cdot |AB| = |AB_1| \cdot |AC|$ što nam daje da je četverokut BCB_1C_1 tetivan.

Sada završavamo obodnim kutem (prva jednakost) te jednakosti iz zadatka (druga jednakost):

$$\angle BB_1C = \angle BC_1C = \angle BB_1A$$

a budući da je $\angle BB_1C + \angle BB_1A = 180^\circ \implies \angle BB_1A = 90^\circ$, što dokazuje da su $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ visine $\triangle ABC$ te X ortocentar.

10. *U šiljastokutnom $\triangle ABC, |AB| = 4$. Neka je D točka na BC takva da $\angle BAD = \angle CAD$. Neka AD siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u X. Γ je kružnica koja prolazi kroz D i X takva da je tangentna na AB u P. Ako $|AP| = 6$, izračunaj $|AC|$.*

    Rješenje.

    Duke Math Meet 2014 Team Round 6

11. *Dvije kružnice Γ_1, Γ_2 sijeku se u točkama C i D. Pravac l siječe Γ_1 u A, Y, dužinu CD u Z, te Γ_2 u X, B, redoslijedom A, X, Z, Y, B. Neka je BW zajednička tangenta na kružnice, sa W na Γ_1. Pretpostavimo $|ZX| = |ZY|$ i $|AB| \cdot |AX| = 100$. Nađi $|BW|$.*

    Rješenje.

    SMO Senior 2014 P35: Circles

12. *U trokutu $\triangle ABC$, preslika točke C preko polovišta nasuprotne stranice označimo sa T. Točke H_1, H_2 nožišta visina spuštenih sa vrhova A, B, redom, H je ortocentar trokuta $\triangle ABC$. Dokaži da su pravci TH i H_1H_2 okomiti.*

    Rješenje. (angle chase)

Ako označimo sa S nožište visine iz vrha C, sa P kao presjek AB i TH, sa Q presjek CH i H_1H_2, te sa R presjek H_1H_2 i HT. Tada tvrdimo da je četverokut $PQRS$ tetivni. Nije teško dokazati da je $\angle SPR = \angle SQR$ pomoću angle chase-a te činjenice da je četverokut $ATBH$ tetivan jer $\angle AHB = 180^\circ - \gamma$, a $\angle ATB = \angle ACB = \gamma$.

13. *Neka su A, B, C i D kolinearne točke tim redoslijedom. Kružnice promjera AC i BD sijeku se u točkama X i Y. Neka je P točka na pravcu XY koja se ne nalazi na pravcu AB te neka su M i N drugi presjeci pravaca CP i BP s kružnicama nad AC i BD, tim redom. Dokažite da se pravci AM, DN i XY sijeku u jednoj točki.*

    Rješenje.

    youtube video rješenje

5 Tetivni, pot točke - još teži

14. *U trokutu ABC vrijedi $BC = 20$. Upisana kružnica trokuta trisecira težišnicu AD (dijeli ju na tri jednaka dijela). Izračunajte površinu trokuta ABC.*

    Rješenje.

    2005 AIME I Problems/Problem 15

15. *Dan je trokut ABC, neka su P i Q točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, redom, takve da $|AP| = |AQ|$. Neka S i R su različite točke na dužini $\overline{BC}$ takve da S leži između B i R, $\angle BPS = \angle PRS$, te $\angle CQR = \angle QSR$. Dokaži da su P, Q, R, S konciklične (tj. da leže na jednoj kružnici).*

    Rješenje.

    2012 USAJMO Problems/Problem 1