Upisana i pripisana kružnica

MetaMath - 7. tjedan

Nika Utrobičić

1 Uvod

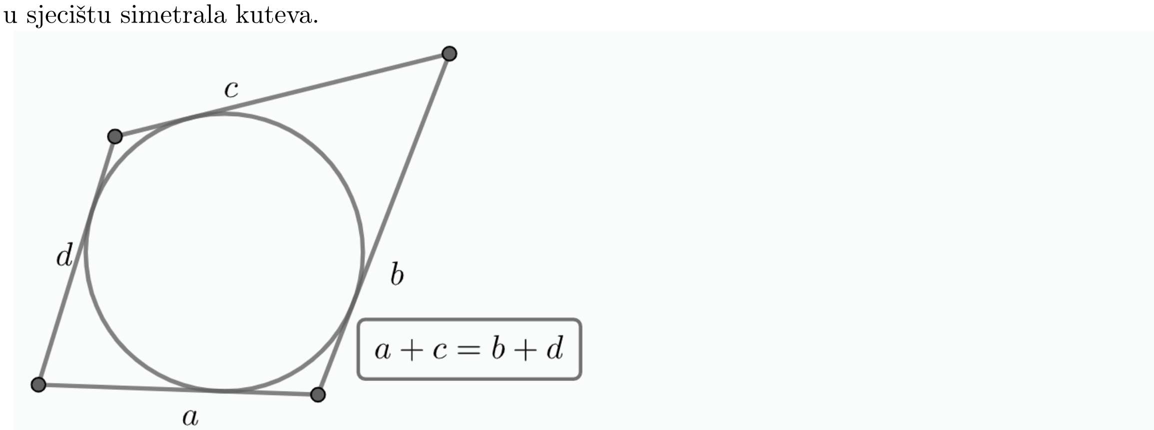
U ovom ćemo tekstu promotriti neke činjenice o upisanim i pripisanim kružnicama koje nam mogu puno pomoći na natjecanju. Kroz nekoliko ćemo primjera proučiti zadatke s upisanim i pripisanim kružnicama s natjecanja, a za više primjera i zadataka za vježbu svakako pogledajte MNM predavanje o upisanoj i pripisanoj kružnici..

Ukoliko želite dublje zaći u temu svakako proučite PDF Prasanne Ramakrishnan All About Excircles i PDF Yufeija Zhaoa Three Lemmas in Geometry, a zahtjevnije zadatke možete pronaći u ovom odličnom predavanju o pripisanim kružnicama. Ukoliko biste htjeli znati više o drugim zanimljivim kružnicama, koristit će vam ovo MNM predavanje o Feuerbachovoj kružnici.

2 Korisne činjenice

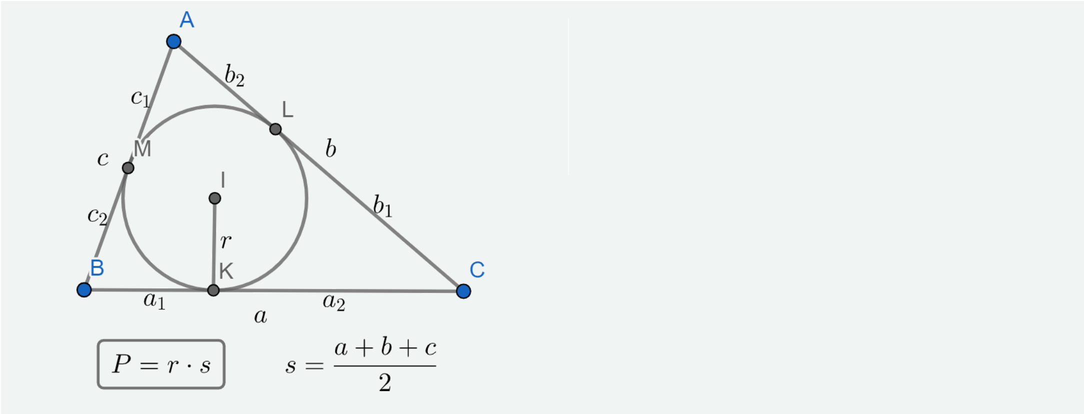
Tangencijalni četverokut - Pitotov teorem Četverokut kojem se može upisati kružnica nazivamo **tangencijalan četverokut**.

Četverokut je tangencijalan ako i samo ako mu je zbroj duljina nasuprotnih stranica jednak. Središte upisane kružnice mu je u sjecištu simetrala kuteva.



Dokaz na linku

Površina Površinu trokuta možemo izračunati koristeći radijus upisane kružnice.



Duljine a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 i c_2 sa slike mogu se izraziti preko stranica trokuta $\triangle ABC$:

$$a_1 = c_2 = \frac{a+c-b}{2}$$

$$a_2 = b_1 = \frac{a+b-c}{2}$$

$$b_2 = c_1 = \frac{b+c-a}{2}$$

Dokaz Površinu trokuta $\triangle ABC$ možemo prikazati kao sumu površina trokuta $\triangle BIC$, $\triangle CIA$ i $\triangle AIB$. Tada

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{BIC} + P_{CIA} + P_{AIB} \\ &= \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} \\ &= \frac{a+b+c}{2} \cdot r \end{aligned}$$

Pa smo dokazali formulu za površinu. Primijetimo da, kako su stranice trokuta $\triangle ABC$ tangente upisane kružnice, po teoremu o potenciji točke $a_1 = c_2$ (odsječci tangenti iz B na upisanu kružnicu), te $a_2 = b_1$ i $b_2 = c_1$. Tada sustav

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a \\ b_1 + b_2 &= b \\ c_1 + c_2 &= c \end{aligned}$$

postaje

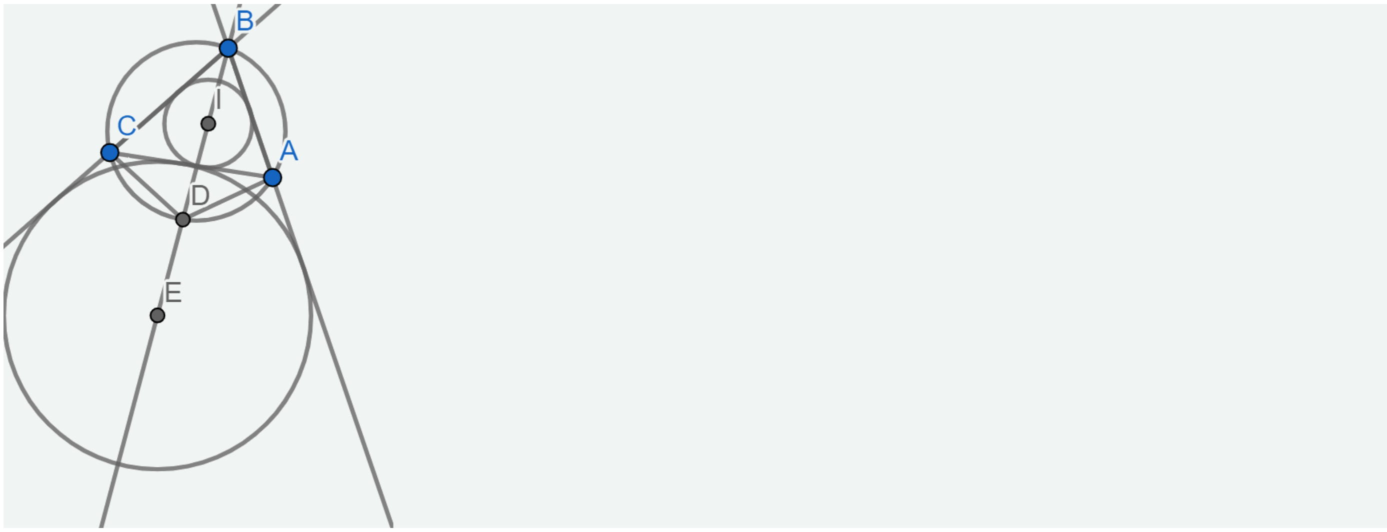
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a \\ a_2 + b_2 &= b \\ b_2 + a_1 &= c \end{aligned}$$

no sada smo dobili sustav 3 jednadžbe s 3 nepoznanice, kojeg lako riješimo i uvjerimo se da formule vrijede.

Lema o trozupcu Neka je ABC trokut. Neka je I središte trokutu upisane kružnice. Neka je D polovište luka AC koji ne sadrži B. Tada je

$$\overline{DA} = \overline{DC} = \overline{DI} = \overline{DE}$$

gdje je E središte trokutu pripisane kružnice koja dira AB, BC i $\overline{AC}$.



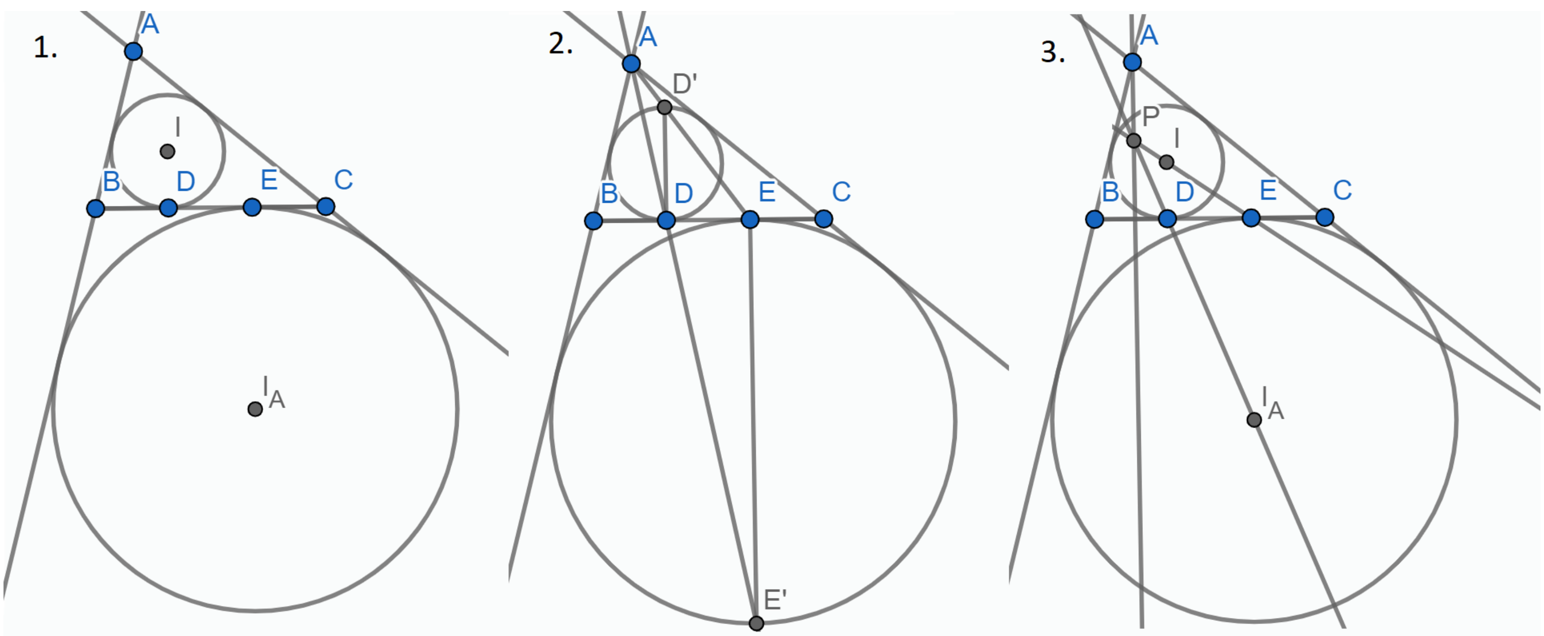
Dokaz na linku

Pripisane kružnice Došlo je vrijeme da definiramo **pripisanu kružnicu**: A-pripisana kružnica trokuta je ona kojoj su pravci na kojima leže stranice trokuta tangente, a jedina stranica trokuta koju dira je ona nasuprot vrha A.

Njezino središte je sjecište simetrala kuta trokuta u vrhu A i vanjskih kuteva u B i C.

Pripisane kružnice imaju mnoga lijepa svojstva u odnosu na upisanu kružnicu, a vaš će zadatak biti dokazati sljedeća svojstva:

1. Vrijedi $BD = CE$.
2. Spojnica A i dirališta pripisane kružnice E siječe upisanu kružnicu u točki dijametralno suprotnoj diralištu upisane D. Drugim riječima, A D' i E su kolinearne, gdje je D' točka dijametralno suprotna točki D. Na sličan način, A, D i E' su kolinearne, gdje je E' točka dijametralno suprotna točki E
3. Pravci IE i $I_A D$ sijeku se u polovištu visine iz A.



Napomena: Za dokazati ove tvrdnje korisno se upoznati s homotetijom.

Dokaz u ovom odličnom predavanju

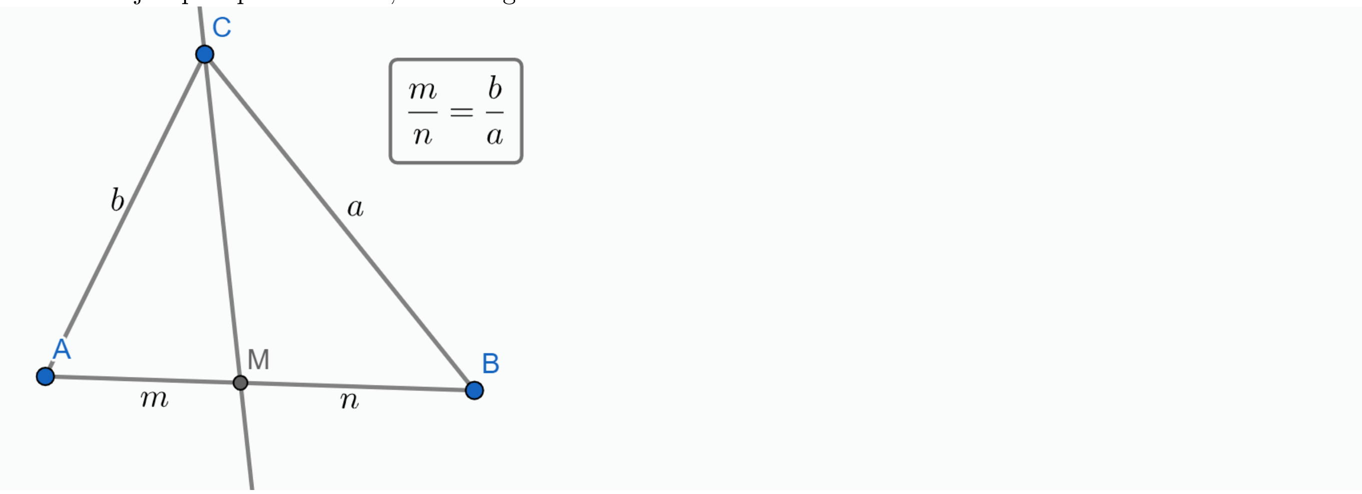
3 Primjeri

1. primjer Riješit ćemo tipični primjer zadatka s upisanom kružnicom s županijske razine natjecanja. Na nižim je razinama natjecanja uobičajeno susresti zadatke koji se lako riješe metodom površine, a najbitnije je imati na umu da je središte upisane kružnice sjecište simetrala kuteva.

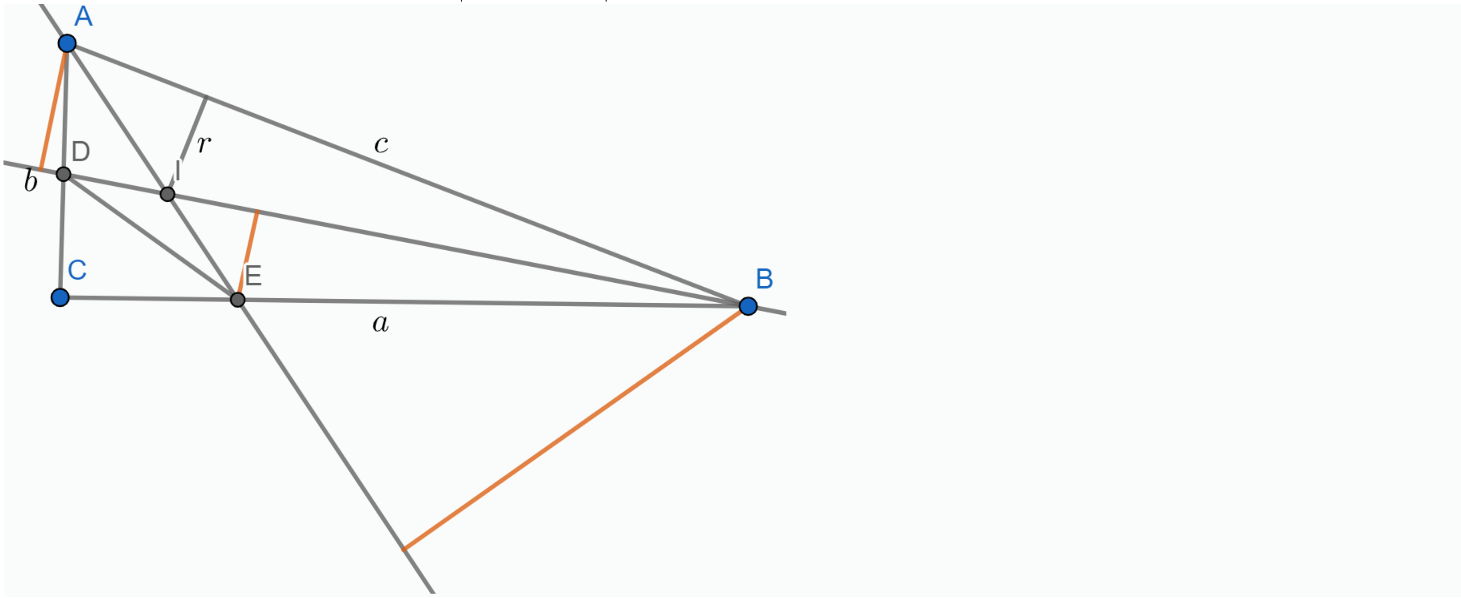
Zadatak: U pravokutnom trokutu ABC simetrale šiljastih kutova $\angle ABC$ i $\angle BAC$ sijeku katete AC i BC redom u točkama D i E. Ako se pravci BD i AE sijeku u točki I, dokažite

$$P_{ABED} = 2P_{ABI}$$

Rješenje Ovaj je zadatak zanimljiv jer se u njemu primjenjuje i **poučak o simetrali kuta** koji kaže da simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica. Taj nam rezultat često može pomoći u zadacima s upisanom kružnicom - ukoliko se s njim prvi put susrećete, svakako ga dokažite.



Kako je BD simetrala kuta $\angle ABC$ vrijedi $|AD| : |CD| = c : a$ i $AD + CD = b$, nije teško vidjeti da $AD = \frac{bc}{a+c}$ i $CD = \frac{ba}{a+c}$. Na isti način zaključujemo i da je $CE = \frac{ab}{b+c}$ i $BE = \frac{ac}{b+c}$.



Sada želimo izraziti površinu četverokuta $ABED$ preko površine $\triangle ABI$.

Vrijedi

$$P_{ABI} = \frac{c \cdot r}{2}$$

Kako je $\triangle DCE$ pravokutan, čini nam se zgodno izraziti P_{ABED} kao $P_{ABC} - P_{DCE}$. Računamo:

$$P_{ABC} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

$$P_{DCE} = \frac{|DC| \cdot |CE|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{a+c} \cdot \frac{ab}{b+c}$$

Čini nam se problematično što se u formuli za površinu $\triangle DCE$ ne pojavljuje r, ali kako je trokut $\triangle ABC$ pravokutan, lako možemo izračunati koliki mora biti r pa ga uključiti u formulu. Iz

$$r \cdot \frac{a+b+c}{2} = \frac{ab}{2}$$

slijedi da je $r = \frac{ab}{a+b+c}$, stoga je

$$P_{DCE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b+c) \cdot ab}{(a+c)(b+c)} \cdot r$$

Sada jednostavno računamo

$$\begin{aligned}
P_{ABED} &= P_{ABC} - P_{DCE} \\
&= \frac{a+b+c}{2} \cdot r \cdot (1 - \frac{ab}{(a+c)(b+c)}) \\
&= \frac{a+b+c}{2} \cdot r \cdot \frac{(a+c)(b+c) - ab}{(a+c)(b+c)} \\
&= \frac{a+b+c}{2} \cdot r \cdot \frac{c \cdot (a+b+c)}{(a+c)(b+c)}
\end{aligned}$$

Sada prepoznamo izraz za P_{ABI}:

$$P_{ABED} = P_{ABI} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{(a+c)(b+c)}$$

Dakle, ako dokažemo da je $(a+b+c)^2 = 2(a+c)(b+c)$, gotovi smo. Raspisujemo:

$$\begin{aligned}
2(a+c)(b+c) &= 2ab + 2bc + 2ac + 2c^2 \\
&= 2ab + 2bc + 2ac + c^2 + c^2 \\
&= 2ab + 2bc + 2ac + c^2 + a^2 + b^2 && \text{Pitagora} \\
&= (a+b+c)^2
\end{aligned}$$

Stoga je

$$P_{ABED} = 2P_{ABI}$$

što je trebalo dokazati. Malo drugačije rješenje ovog zadatka i još puno sličnih primjera možete pronaći u MNM predavanju o metodi površine.

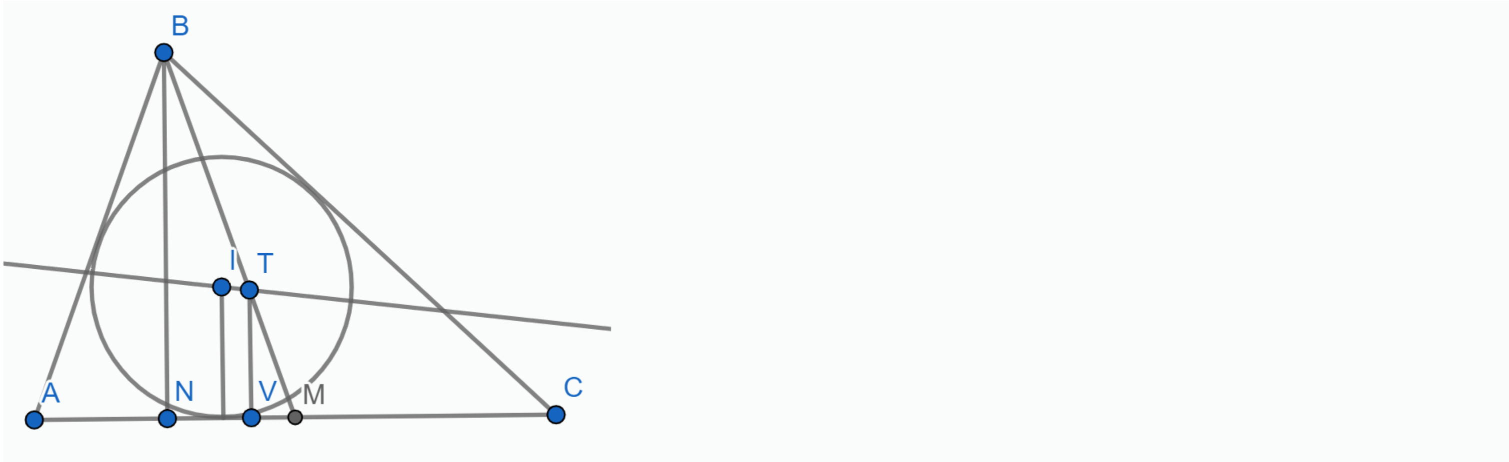
2. PRIMJER Na natjecanjima se često pojavljuju zadaci s upisanim kružnicama u kojima znamo nešto o odnosu stranica.

Zadatak: Ako je zbroj duljina dviju stranica raznostraničnog trokuta jednak dvostrukoj duljini treće stranice, dokaži da je pravac kroz središte upisane kružnice i težište trokuta paralelan sa stranicom koja je srednja po duljini.

Rješenje Prisjetimo se formule za površinu trokuta preko radijusa upisane kružnice - uvjet $a + c = 2b$ bi je mogao znatno pojednostaviti:

$$P_{ABC} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}br$$

Prikažemo li sada površinu trokuta $\triangle ABC$ preko stranice AC i odgovarajuće visine, imamo $P_{ABC} = \frac{b \cdot v_b}{2}$, iz čega lako dobijemo $|BN| = v_b = 3r$.



Povucimo visinu na AC iz T i označimo njeno nožište s V. Kada bismo dokazali da je $TV = r$, bili bismo gotovi jer bi i I i T bili jednako udaljeni od pravca AC, a kako su mu s iste strane to bi značilo da je $IT||AC$.
Primijetimo sada da su trokuti $\triangle BNM$ i $\triangle TVM$ slični po $K-K$ poučku jer im je šiljasti kut u vrhu M zajednički, a oba su pravokutna. Zato $|TV| : |BN| = |TM| : |BM|$. Sjetimo li se svojstava težišta, shvatit ćemo da znamo da je omjer u kojem ono dijeli težišnicu 2 naprama 1 od vrha prema stranici, stoga je $|TM| : |BM| = 1 : 3$.

Dakle,

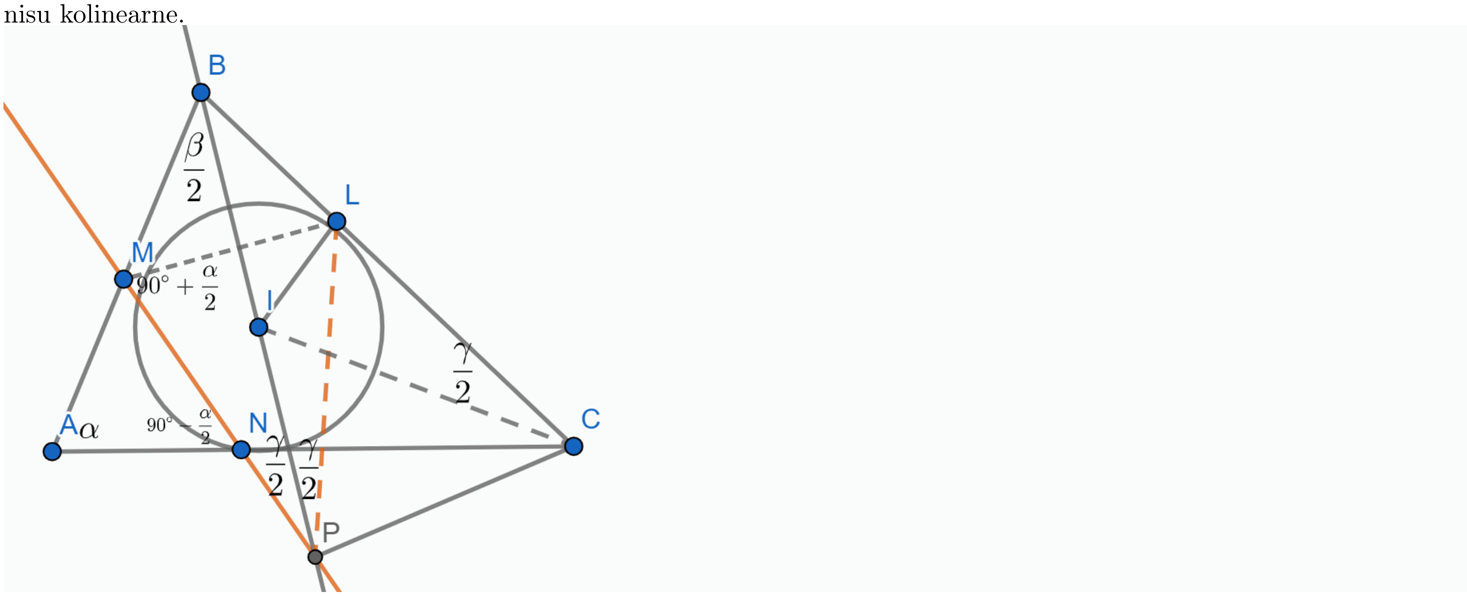
$$|TV| : |BN| = |TV| : 3r = 1 : 3$$

iz čega zaključujemo da je $|TV| = r$, stoga smo gotovi.

3. PRIMJER Za kraj ćemo baciti oko na rješenje jednog zadatka s upisanom kružnicom koji se pojavio na državnom natjecanju. Kroz rješenje ćemo proći neformalno, s naglaskom na proces rješavanja - kako bismo do ovako nečega mogli doći na natjecanju. Detaljno rješenje možete proučiti na linku.

Zadatak: Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\angle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.

RJEŠENJE **1. korak** Odlučujem da želim dokazati da je $PCLI$ tetivan
Za početak, bilo bi prirodno uvesti oznaku za središte upisane kružnice I i diralište upisane kružnice sa stranicom $\overline{BC}$, L. Kako bismo mogli dokazati da je traženi kut pravi? Najbezbolniji put bi mogao biti tražiti neki tetivni četverokut. Imam li kandidata? Da - kad bismo dokazali da je četverokut $PCLI$ tetivan, bili bismo gotovi! Je li to četverokut kojem je razumno računati kuteve? Da, ne djeluje preteško, kut $\angle LCI$ već imam zbog upisane kružnice... Da, ima smisla probati! Još neki kandidat? Ako imam nespretno nacrtanu skicu mogla bih se zeznuti na natjecanju pa gledati $PCBM$, ali naravno, kut $\angle CMB$ **nije pravi** jer CIM nisu kolinearne.



2. korak Računam kut $\angle MPB$

Sad kad sam odlučila što radim, označim na skici sve kuteve koji mi djeluju korisno, a mogu ih izračunati. Zato sam označila $\angle ICL = \frac{\gamma}{2}$. Mogu li nekako dobiti kut $\angle MPB$? Pa mogu! Kut $\angle MBP$ je $\frac{\beta}{2}$, a kut $\angle PMB$ je vanjski kut trokuta $\triangle AMN$. Sad se sjetim svojstava upisane kružnice - vrijedi $|AN| = |AM|$. Dakle, $\triangle AMN$ je jednakokračan, stoga je $\angle AMN = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Sada slijedi da je $\angle PMB = 90° + \frac{\alpha}{2}$, stoga je

$$\angle MPB = 180° - 90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

3. korak Uočavam deltoid

Hmm, računala sam 2 kuta i oba su ispala $\frac{\gamma}{2}$... Da sam ih barem dobila na boljim mjestima, mogla bih odmah završiti zadatak... Konkretno, da sam dobila $\angle IPL = \frac{\gamma}{2}$, bila bih gotova. Kutevi $\angle IPL$ i ovaj kut $\angle MPB$, odnosno $\angle MPI$ su jako slični, skoro da je jedan zrcalna slika drugog. Malo se bolje zagledam i vidim da to stvarno je tako! Naime, trokut BML je jednakokračan jer su M i L dirališta upisane kružnice, a BP je onda, kao simetrala kuta nasuprot osnovice jednakokračnog trokuta, ujedno i visina na ML. To znači da je na nju okomita te da ju (jer je trokut jednakokračan) raspolavlja. Opće je poznato da je četverokut čije su dijagonale okomite i jedna dijagonala raspolavlja drugu deltoid! Sada mogu zaključiti da je $\angle IPL = \angle MPI = \angle\frac{\gamma}{2}$. Napomena: mogli smo samo uočiti sukladnost trokuta $\triangle BMP$ i $\triangle BLP$ bez spominjanja svojstava deltoida.

4. korak Jej!

Primijetimo da sada imamo $\angle IPL = \angle ICL = \frac{\gamma}{2}$, stoga je četverokut $IPLC$ tetivan, pa je $\angle IPC + \angle ILC = 180°$, a kako je $\angle ILC = 90°$, možemo zaključiti da je $\angle IPC = \angle BPC = 90°$, pa je BP okomito na CP, što je trebalo dokazati.

Super, riješili smo zadatak! U ovom zadatku vidjeli smo kako označavanje nekoliko točaka za koje je prirodno da su na skici može bitno olakšati zadatak.

4 Osnovni lanac

1. Zadan je pravokutni trapez kome se može upisati kružnica. Ako udaljenosti središta upisane kružnice od krajeva duljeg kraka iznose 15 cm i 20 cm, kolika je površina trapeza?

   Rješenje Općinsko natjecanje iz matematike 2010. - SŠ3

2. Dan je trokut ABC. Neka su I_B i I_C središta B i C pripisanih kružnica. Dokaži da se četverokutu I_BBCI_C može opisati kružnica.te da njeno središte leži na kružnici opisanoj $\triangle ABC$. Gdje točno?

   Rješenje Teorem 4 u PDFu Prasanne Ramakrishnan

3. Neka su D, E i F redom nožišta visina iz vrhova A, B i C u trokutu ABC. Dokaži da je ortocentar H trokuta ABC ujedno i središte upisane kružnice trokuta DEF.

   Rješenje Označimo kuteve trokuta $\triangle ABC$ u vrhovima A, B i C α, β i γ redom. Iz pravokutnog trokuta $\triangle DAB$ računamo $\angle DAB = \angle HAF = 90° - \beta$. Kako je $\angle AFH = \angle AEH = 90°$, četverokut $AFHE$ je tetivan. Po teoremu o obodnom kutu, $\angle FEH = \angle FAH = 90° - \beta$.

   Na isti način iz pravokutnog trokuta $\triangle CFB$ računamo $\angle HCD = \angle FCB = 90° - \beta$, pa iz tetivnog četverokuta $DHEC$ računamo $\angle HED = 90° - \beta$.

   Dakle, $\angle FEH = \angle HED$, stoga je EH simetrala kuta $\angle DEF$. Kako analogan dokaz možemo provesti i za ostale visine, zaključujem da je H središte upisane kružnice $\triangle DEF$.

4. Trokutu ABC upisana je kružnica koja redom dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ u točkama D, E, F. Dokažite da se pravci AD, BE, CF sijeku u istoj točki P.

   Rješenje Županijsko natjecanje iz matematike 2001. - SŠ2

5. Ako je r radijus upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$, a r_A, r_B i r_C radijusi A-pripisane, B-pripisane i C-pripisane kružnice redom, dokažite da vrijedi

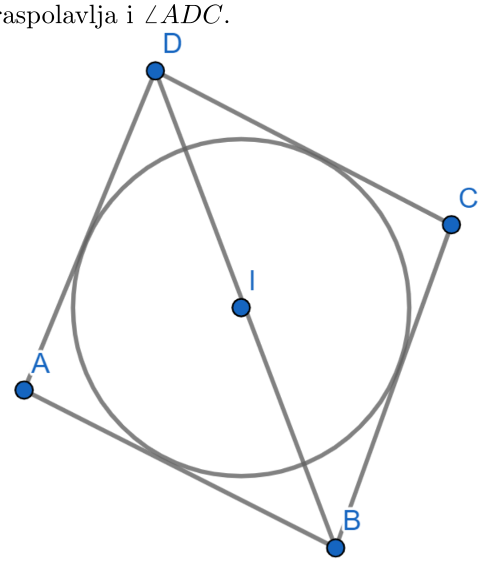
$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{r}$$

Rješenje Problem 1 u PDFu Prasanne Ramakrisnan

5 Ozbiljniji lanac

1. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut s pravim kutom u vrhu D čija dijagonala BD raspolavlja kut $\angle ABC$. Ako opseg četverokuta $ABCD$ iznosi 50, a duljina dijagonale $|AC| = 10\sqrt{2}$, izračunajte polumjer upisane kružnice tog četverokuta.

   Rješenje Kako je dijagonala BD simetrala kuta $\angle ABC$, središte upisane kružnice I leži na BC. To znači da BC raspolavlja i $\angle ADC$.

   Kako je $\angle ADB = \angle BDC$ i $\angle ABD = \angle DBC$, te trokuti $\triangle DAB$ i $\triangle BCD$ su sukladni po poučku K-S-K. To znači da $|AD| = |DC|$, stoga $\triangle ADC$ jednakokračan pravokutan. Kako po Pitagorinom poučku vrijedi $|AD|^2 + |DC|^2 = (10\sqrt{2})^2$, lako dobijemo $|AD| = 10$, Kako $|AB| = |BC|$ i opseg četverokuta je 50, lako vidimo da je $|AB| = |BC| = 15$. Prikažimo sada površinu četverokuta $ABCD$ na 2 načina.

   $$P_{ABCD} = r \cdot a + b + c + d2 = r \cdot \frac{50}{2} = 25r$$

   S druge strane, $P_{ABCD} = P_{ADC} + P_{ABC}$. Lako izračunamo da je $P_{ADC} = 50$, a kako trokutu $\triangle ABC$ znamo sve duljine stranica - 15, 15 i $10\sqrt{2}$, možemo primijeniti Heronovu formulu za računanje površine ovog trokuta.

   $$\begin{aligned} P_{ABC} &= \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \\ &= \sqrt{(15 + 5\sqrt{2}) \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot (15 - 5\sqrt{2})} \\ &= 5\sqrt{(15^2 - (5\sqrt{2})^2) \cdot 2} \\ &= 5\sqrt{7 \cdot 25 \cdot 2} \\ &= 25\sqrt{14} \end{aligned}$$

   Dakle mora vrijediti $P_{ABCD} = 50 + 25\sqrt{14}$, stoga iz

   $$25r = 50 + 25\sqrt{14}$$

   računamo $r = 2 + \sqrt{14}$.

2. Točka S je središte trokutu ABC upisane kružnice, a simetrala kuta $\angle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Dokaži da je $|AS| : |SD| = 2 : 1$ ako i samo ako vrijedi $|CA| + |AB| = 2|BC|$.

Rješenje Županijsko natjecanje iz matematike 2010. - SŠ2

3. Neka je ABC trokut takav da je $|AB| > |AC|$. Neka je t tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A. Kružnica sa središtem u točki A koja prolazi točkom C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, a pravac t u točkama E i F tako da su C i E s iste strane pravca AB. Dokaži da središte upisane kružnice trokuta ABC leži na pravcu DE.

Rješenje Državno natjecanje iz matematike 2016. - SŠ2

4. Dan je trokut $\triangle ABC$. Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M. Kružnica s promjerom $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{LM}$ u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q. Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k.

Rješenje Državno natjecanje iz matematike 2017. - SŠ2

5. Neka je ABC trokut takav da je $3|BC| = |AB| + |CA|$. Neka je T točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $4|AT| = |AC|$ i neka su K i L točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$ redom, takve da je $KL \parallel BC$ i da je pravac KL tangenta upisane kružnice trokuta ABC.

   U kojem omjeru dužina $\overline{BT}$ dijeli dužinu $\overline{KL}$?

Rješenje Državno natjecanje iz matematike 2019. - SŠ2

6 Ekstremniji zadaci

1. Dan je trokut ABC takav da je $|AB| < |AC|$. Na stranicama AB i BC, redom su dane točke P i Q takve da su pravci AQ i CP okomiti, a kružnica upisana trokutu ABC dira dužinu PQ. Pravac CP siječe kružnicu opisanu trokutu ABC u točkama C i T. Ako se pravci CA, PQ i BT sijeku u jednoj točki, dokaži da je kut $\angle CAB$ pravi.

Rješenje HMO 2020

2. Neka je J središte pripisane kružnice $\triangle ABC$ nasuprot vrha A. Ta pripisana kružnica dira stranicu BC u M, a stranice AB i AC u K i L redom. Pravci LM i BJ sijeku se u F, a pravci KM i CJ sijeku se u G. Neka je S presjek pravaca AF i BC, a neka je T presjek pravaca AG i BC. Dokaži da je M polovište dužine ST.

Rješenje IMO Shortlist 2012. G1