Indukcija - rješenja

Tomislav Kralj

Zadatak 1. *Dokažite da je suma prvih n parnih prirodnih brojeva jednaka $n^2 + n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Rješenje. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po broju n. Pokažimo prvo da navedena jednakost vrijedi za broj $n = 1$. Lijeva strana jednakosti je jednaka $2 \cdot 1 = 2$, dok je desna strana jednaka $1^2 + 1 = 2$ Dakle, imamo jednakost $2 = 2$ koja očito vrijedi, pa je baza dokazana.

Pretpostavimo da jednakost

$$2 + 4 + \ldots + 2k = k^2 + k$$

vrijedi za neki prirodan broj k. Trebamo dokazati da jednakost vrijedi i za $k+1$, odnosno da vrijedi

$$2 + 4 + \ldots + 2k = (k + 1)^2 + (k + 1).$$

Lijevu stranu možemo raspisati koristeći pretpostavku na način

$$\begin{aligned} 2 + 4 + \ldots + 2k + 2(k + 1) &= k^2 + k + 2(k + 1) \\ &= k^2 + k + 2k + 2 \\ &= k^2 + 2k + 1 + k + 1 \\ &= (k + 1)^2 + (k + 1). \end{aligned}$$

Ovime je korak indukcije dokazan, pa tvrdnja zadatka vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Zadatak 2. *Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Rješenje. Pokažimo bazu. Za $n = 1$ vrijedi

$$1^2 = \frac{1(1 + 1)(2 + 1)}{6}.$$

Pretpostavimo kako tvrdnja vrijedi za neki k te dokažimo za $k + 1$. Koristeći pretpostavku indukcije, imamo da je lijeva strana jednaka

$$\begin{aligned}
\left(1^2+2^2+\ldots+k^2\right)+\left((k+1)^2\right) &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1)}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left(2k^2+k+6k+6\right.}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right.}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left(2k^2+4k+3k+6\right)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}
\end{aligned}$$

što je upravo izraz na desnoj strani za $k+1$. □

Zadatak 3. *Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Rješenje. Za $n=1$ imamo da

$$1^3=1=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$$

pa tvrdnja u tom slučaju vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo tvrdnju za $n+1$. Imamo da

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^2(n+1) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4n+4\right) \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

čime je dokazana tvrdnja. □

Zadatak 4. *Oznaka $a \mid b$ čita se kao "a dijeli b" te simbolizira da postoji cijeli broj k takav da $a \cdot k = b$. Tako, primjerice vrijedi $2 \mid 4$, ali ne i $2 \mid 5$. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$3 \mid n^3+2n.$$

Rješenje. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi jer je u tom slučaju promatrani izraz jednak 3. Pretpodstavimo da tvrdnja vrijedi za neki k. Dokažimo da vrijedi za $k+1$. Izraz na desnoj strani je jednak

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3.$$

Kako po pretpostavci indukcije $3 \mid k^3 + 2k$ te

$$3 \mid 3k^2 + 3k + 3,$$

imamo da je izraz djeljiv s 3 i za $k+1$. □

Zadatak 5. *Dokažite da vrijedi sljedeća nejednakost*

$$2^n > 10n^2,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq 10$.

Rješenje. Za $n = 10$ imamo da

$$2^{10} > 10^3 \Longleftrightarrow 1024 > 1000,$$

što je istina. Pretpostavimo da

$$2^k > 10k^2$$

za neki $k \geq 10$. Ako pomnožimo prethodnu nejednakost s 2, imamo da

$$2 \cdot 2^k > 10k^2 + 10k^2.$$

Kako vrijedi

$$10k^2 > 20k + 10$$

za $k \geq 10$, imamo da

$$2^{k+1} > 10k^2 + 10k^2 > 10k^2 + 20k + 10 = 10(k+1)^2$$

čime smo dokazali tvrdnju i za $k+1$. □

Zadatak 6. *Ako je* $x + \frac{1}{x}$ *cijeli broj, pokažite da je* $x^n + \frac{1}{x^n}$ *cijeli broj, za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Za $n = 1$, imamo da

$$x^1 + \frac{1}{x^1}$$

je cijeli broj prema definiciji. Sada pretpostavimo da je tvrdnja istinita za sve $n \leq k$. Vrijedi da

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) + \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

Kako su po pretpostavci indukcije skoro svi gornji izrazi cijeli brojevi (osim za $k+1$, što još ne znamo), nužno mora vrijediti da je i

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$$

cijeli broj jer je skup cijelih brojeva zatvoren na zbrajanje i množenje. □

Zadatak 7. *Dokažite da je* $\overline{\underbrace{2\ldots2}_{n\ puta}}-3^n+1$ *djeljivo brojem 7 , za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Za $n = 1$ imamo da

$$7 \mid 2 - 3 + 1,$$

pa tvrdnja u tom slučaju vrijedi. Pretpostavimo kako

$$7 \mid \underbrace{2\ldots2}_{k \text{ puta}} - 3^k + 1$$

te pokažimo da vrijedi

$$7 \mid \overline{\underbrace{2\ldots2}_{k+1 \text{ puta}}} - 3^{k+1} + 1$$

Izraz s desne strane se može raspisati kao

$$7 \mid 2 \cdot 10^k - 2 \cdot 3^k + (\underbrace{2\ldots2}_{k \text{ puta}} - 3^k + 1).$$

Prema pretpostavci indukcije, izraz u zagradama je dijeljiv sa 7, tako da trebamo provjeriti je li

$$7 \mid 2 \cdot 10^k - 2 \cdot 3^k.$$

Međutim, to je sada očito jer možemo iskoristiti formulu

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} b^j,$$

pa lijevu stranu možemo zapisati kao

$$7 \mid 2(10 - 3) \cdot \text{nešto}.$$

Time je pokazana tražena tvrdnja. □

Zadatak 8. *Koliko ima podskupova skupa* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *koji ne sadrže susjedne elemente?*

Rješenje. Označimo taj broj sa a_n te promotrimo broj a_{n+1}. Svaki podskup koji zadovoljava uvjet može se svrstati u dvije kategorije: one koji sadržavaju $n+1$ i one koji ga ne sadržavaju. Ako ga ne sadržavaju, vidimo da su ti skupovi također podskupovi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ pa takvih ima a_n. Ako ga sadržavaju, vidimo da svaki takav skup A možemo bijektivno preslikati:

$$A \mapsto A \backslash \{n + 1\}$$

Dobiveni skupovi ne sadržavaju $n + 1$, a ne sadržavaju ni n po uvjetu zadatka. Dakle, oni su podskupovi skupa $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Dodatno, vidimo da svi podskupovi tog skupa koji zadovoljavaju uvjet za $n-1$ također zadovoljavaju uvjet za $n+1$. Zaključujemo da takvih podskupova ima točno a_{n-1}. Stoga, vrijedi rekurzivna relacija

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Kako je očito $a_1 = 1, a_2 = 2$, vidimo da je tražena vrijednost $a_n = F_{n+1}$ gdje je F_n n-ti Fibonaccijev broj. □

Zadatak 9. *Svakom vrhu pravilnog mnogokuta pridružen je jedan od brojeva 0 i 1 i svim vrhovima nije pridružen isti broj. Koristeći dijagonale koje se međusobno ne sijeku osim u vrhovima, Ivica dijeli mnogokut na trokute, a zatim u svaki trokut upisuje zbroj brojeva pridruženih njegovim vrhovima. Dokažite da Ivica može odabrati dijagonale kojima će podijeliti mnogokut na trokute u koje će biti upisani brojevi 1 ili 2.*

Rješenje. Za trokut imamo opcije 001 i 011, tako da za njega vrijedi tvrdnja zadatka. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n-terokut. Kako nisu svim vrhovima pridruženi isti brojevi, postoji bar jedna 01 stranica te između ubacimo novi vrh. Uočimo kako za taj vrh nema razlike je li mu dodjeljen 0 ili 1, pa stranica 01 postaje dijagonala tako dobivenog $(n+1)$-terokuta. □