Seminar 1: Miks zadataka s tečaja

Ivan Miošić za Metamath 2022/2023

2. prosinca 2022.

Pisane kružnice

Zadatak 1.

Dokažite da svaki pravac koji prolazi središtem upisane kružnice trokuta dijeli opseg i površinu tog trokuta u istom omjeru.

Rješenje.
Općinsko natjecanje iz matematike 1997. SŠ2-1

Zadatak 2.

Neka je ABC šiljastokutan trokut s ortocentrom H. Neka su D, E i F nožišta visina iz A, B, C redom. Pokažite da na opisanoj kružnici trokuta $\triangle DEF$ leže sva polovišta stranica trokuta ABC, kao i polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ i $\overline{CH}$.
Ta se kružnica zove kružnica devet točaka ili Feuerbachova kružnica, a više o njoj možete pročitati ovdje.

Rješenje.
Vidi link iz teksta zadatka.

Polinomi

Zadatak 1.

Svi korijeni polinoma $x^3 - ax^2 + bx - 2010$ su prirodni brojevi. Koja je najmanja moguća vrijednost koeficijenta a?

Rješenje.
`https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2010_AMC_10A_Problems/Problem_21`.

Zadatak 2.

Neka su a, b, c međusobno različiti realni brojevi. Dokažite da za bilo koji realni broj d vrijedi sljedeći identitet:

$$a^2 \frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)} = d^2.$$

Rješenje.
`https://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=61049`.

Zadatak 3.

Nađi sve polinome $P(x)$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$$xP(x-1) = (x-26)P(x)$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.
Zadatak iz `https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2020/05/polinomi.pdf`.
Pred nama je funkcijska jednadžba, tj. jednadžba u kojoj nepoznanica nije broj nego funkcija. Inače se funkcijske jednadžbe razmatraju tek u četvrtom razredu, ali ovdje je riječ o polinomima pa je stavljeno kao blagi uvod u ovu temu.
Bilo kako bilo, pokušajmo riješiti ovu jednadžbu. Osnovna metoda rješavanja funkcijskih jednadžbi je uvrštavanje konkretnih vrijednosti argumenta funkcije kako bi se dobile neke vrijednosti funkcije. Ideja je onda zaključiti nešto o općem ponašanju funkcije iz dobivenih konkretnih vrijednosti.
U našem slučaju, neki kandidati za uvrštavanje umjesto argumenta x se javljaju sami od sebe, prvenstveno $x = 0$ i $x = 26$, jer se ti brojevi „spominju" i vidimo da će se njihovim uvrštavanjem neke stvari poništiti. Za $x = 0$ ostaje $0 \cdot P(25) = -26 \cdot P(0)$, iz čega zaključujemo $P(0) = 0$. Slično, iz uvrštavanja $x = 26$ dobijemo $P(25) = 0$.
Sad tražimo nove vrijednosti za uvrštavanje. Primjećujemo $x - 1$ u argumentu od P, što nas navodi da uvrštavamo za jedan veće vrijednosti od onih koje već imamo izračunate. Tako uvrštavajući $x = 1$ dobijemo $1 \cdot P(0) = -25 \cdot P(1)$, iz čega zbog $P(0) = 0$ slijedi $P(1) = 0$. Sada možemo uvrstiti $x = 2$ i ponovno dobiti $P(2) = 0$, i tako dalje do $x = 25$. Vrijedi dakle: $P(0) = P(1) = P(2) = \cdots = P(25) = P(25) = 0$. Primjetimo da za $x = 26$ ne dobivamo novih informacija, jer nam rezultirajuća jednadžba $26 \cdot P(25) = 0 \cdot P(26)$ ne govori ništa pametno zbog $P(25) = 0$.
Za sada znamo da polinom P ima 26 korijena, i to $0, 1, 2, \ldots, 25$. Iz teorema o faktorizaciji polinoma, znamo da P možemo pisati kao:

$$P(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-25)Q(x),$$

za neki polinom Q. Uvrštavanjem ovoga u početnu jednadžbu dobijemo jednaki izraz na obe strane (provjerite). Zaključujemo da nema uvjeta na polinom Q, odnosno on može biti proizvoljan. Konačno, rješenje početne funkcijske jednadžbe je bilo koji polinom P stupnja najmanje 26 kojemu su neke nultočke brojevi $0, 1, 2, \ldots, 25$.

Princip ekstrema

Zadatak 1.

Pronađite sva pozitivna realna rješenja sljedećeg sustava:

$$x_1 + x_2 = x_3^2$$

$$x_2 + x_3 = x_4^2$$

$$x_3 + x_4 = x_1^2$$

$$x_4 + x_1 = x_2^2$$

Rješenje.
MNM online predavanje - zadatak 14 (s tim da je greška u tekstu originalnog zadatka).

Zadatak 2.

U tablici $n \times n$ napisani su brojevi od 1 do n^2. Dokažite da postoje dva susjedna polja koja se razlikuju za barem $n + 1$. Susjednim poljima podrazumijevamo ona koja dijele barem jedan vrh.

Rješenje.
MNM online predavanje - zadatak 15

Dirichletov princip

Zadatak 1.

Dokažite da među bilo kojih 7 kvadrata prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika djeljiva s 10 .

Rješenje (credit: zaq).
Svi kvadratni ostatci modulo 10 su $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Njih ima 6 pa su po Dirichletovom principu neka dva kvadrata od danih 7 kongruenti modulo 10. To točno znači da 10 dijeli njihovu razliku.

Zadatak 2.

Dokažite da među bilo kojih 6 ljudi postoje 3 osobe koje se sve ili međusobno poznaju, ili ne poznaju. Poznanstva su uzajamna.

Rješenje (credit: EMissoni).
Gledamo jednog čovjeka: on ima $6 - 1 = 5$ „veza” (veza može biti poznanstvo ili nepoznanstvo), označimo ga sa P_1.
Ta veza može biti u 2 stanja (poznaje ili ne poznaje) i po Dirichletovom principu postoje 3 veze istog tipa. Označimo te ljude koje su spojeni tim vezama istog tipa sa O_1, O_2, O_3.
Sad, znamo da su veze P_1O_1, P_1O_2, P_1O_3 istog tipa, pa ako su neke od veza O_1O_2, O_1O_3, O_3O_2 tog istog tipa, onda smo gotovi. Inače ako su sve drugog tipa, onda se O_1, O_2, O_3 ili svi poznaju ili ne poznaju, opet smo gotovi.