A	Juniorska grupa

Pripreme za državno
Zagreb, travanj 2023.

Algebarski mix

Maja Drmač

11.04.2023.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Mali podsjetnik na neke najbitnije identitete i ideje :)
Faktorizacija: ponekad nam olakšava rješavanje jednadžbe, pogotovo ako je na desnoj strani 0. Ponovimo algebarske identitete koji se najčešće koriste:

- kvadrat binoma: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- kub binoma: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- kvadrat trinoma: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
- razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- zbroj i razlika kubova: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- razlika n-tih potencija gdje je n prirodan broj: $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- razlika n-tih potencija gdje je n **neparan** prirodan broj: $a^n + b^n = (a+b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \cdots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$

Uz ove identitete, korisna su nam svojstva asocijativnosti, distributivnosti, komutativnosti te naravno izlučivanje zajedničkog faktora (ako možemo).

Sustavi jednadžbi. Sustav m jednadžbi s n nepoznanica je skup m jednadžbi bilo kakvog oblika, sa sveukupno n nepoznanica. Rješenje sustava je uređena n-torka koja zadovoljava svih m jednadžbi. Korisne stvari kod rješavanja sustava jednadžbi su:

- supstitucija ili izražavanje nepoznanica jedne preko druge,
- međusobno zbrajanje, oduzimanje, množenje jednadžbi - da pokratimo neke nepoznanice ako možemo,
- faktorizacija.

Napomena: ne zaboravite provjeriti rješenja! Kad radimo neke operacije (npr. kvadriranje) može se dogoditi da dobijemo neka nova rješenja koja nisu rješenja originalne jednadžbe.

Nejednakosti. Neke od osnovnih nejednakosti koje se mogu pojaviti na državnom natjecanju:

- apsolutna vrijednost: za $s \geq 0$, $|a| \leq s \Leftrightarrow -s \leq a \leq s$, i $|a| \geq s \Leftrightarrow a \geq s$ ili $a \leq -s$,
- nejednakost trokuta: za realne brojeve a, b, $|a+b| \leq |a| + |b|$; vrijedi poopćenje na n realnih brojeva,
- **nejednakosti među sredinama**: vrijedi $K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$, gdje je $K_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$ (kvadratna sredina), $A_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ (aritmetička sredina), $G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ (geometrijska sredina) i $H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ (harmonijska sredina).

Zadaci

1. Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3 \quad \text{i} \quad \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=10.$$

Odredi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

2. Odredi sve trojke (x, y, z) pozitivnih realnih brojeva koje zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$3\lfloor x\rfloor-\{y\}+\{z\}=20.3$$

$$3\lfloor y\rfloor+5\lfloor z\rfloor-\{x\}=15.1$$

$$\{y\}+\{z\}=0.9.$$

Za realni broj t, $\lfloor t\rfloor$ označava najveći cijeli broj koji je manji ili jednak t, a $\{t\}$ njegov decimalni dio, tj. $\{t\}=t-\lfloor t\rfloor$.

3. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza

$$a^2+5b^2+8c^2-4ab-4bc-8c+24$$

pri čemu su a, b i c realni brojevi te odredi za koje a, b, c se ta vrijednost postiže.

4. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu

$$(x^2-a^2)^2-4ax-1=0,$$

gdje je a realni broj.

5. (*Identitet Sophie Germain*) Faktorizirajte izraz a^4+4b^4 i pokažite da je, ako su a i b prirodni brojevi, a^4+4b^4 složen broj osim kada je $a=b=1$.

6. Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) za koje vrijedi $4xyz=x^4+y^4+z^4+1$.

7. Odredi sva rješenja sustava jednadžbi

$$2a^2-2ab+b^2=a$$
$$4a^2-5ab+2b^2=b$$

u skupu realnih brojeva.

8. Dokaži da za nenegativne realne brojeve a i b takve da je $a+b\leq 2$ vrijedi

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\leq\frac{2}{1+ab}.$$

Kada se postiže jednakost?

9. Nađite realna rješenja sustava jednadžbi:

$$x+y+z=2$$
$$(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1$$
$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6.$$

Nešto teži zadaci

10. Neka su O i P redom opseg i površina pravokutnika. Dokaži da vrijedi

$$O \geq \frac{24P}{O+P+1}.$$

11. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2a-1}+\frac{b^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2b-1}+\frac{c^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2c-1} \leqslant 3.$$

12. Neka su a, b, c realni brojevi koji nisu svi jednaki, takvi da vrijedi

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}.$$

Dokaži da je $a+\frac{1}{b}=-abc$.

13. Kažemo da je četvorka nenegativnih realnih brojeva (a, b, c, d) *balansirana* ako vrijedi

$$a+b+c+d=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Nađi sve pozitivne realne brojeve x takve da je

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)>0$$

za svaku balansiranu četvorku (a, b, c, d).

14. Odredite sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$(x^2+1)y=z^2+1$$

$$(y^2+1)z=x^2+1$$

$$(z^2+1)x=y^2+1.$$

15. Neka su a, b i c realni brojevi koji zadovoljavaju jednakost

$$|a+b|+|b+c|+|c+a|=8.$$

Odredi najveću i najmanju moguću vrijednost izraza

$$a^2+b^2+c^2$$

te odredi kada se ona postiže.

Hintovi

1. Pomnoži s ab. Zbroj kubova.
2. 1.+3. jednadžba.
3. Nadopuna do kvadrata.
4. Izvuci $4a^2x^2$ iz prve zagrade.
5. $a^4 + 4b^4 = (a^2)^2 + (2b^2)^2$
6. A-G
7. Pomnoži prvu jednadžbu s 2 i oduzmi od druge.
8. Nazivnici su pozitivni. Sredi nejednakost!
9. Iskoristi 1. jednadžbu u 2. i 3.
10. Pametno primjeni A-G.
11. Dovoljno je pokazati da je jedan član ≤ 1.
12. Supstitucija $p = a + \frac{1}{b}$.
13. Nadopuna do kvadrata.
14. Pomnoži sve jednadžbe, dva slučaja.
15. Maksimum nejednakost trokuta, minimum K-A nejednakost.

Rješenja

1. Općinsko 2019. A varijanta - 1. razred, 2. zadatak
2. Županijsko 2017. A varijanta - 2. razred, 3. zadatak
3. Županijsko 2016. A varijanta - 1. razred, 3. zadatak
4. Državno 2007. A varijanta - 2. razred, 1. zadatak
5. Sophie-Germain identity
6. Županijsko 2005. - 1. razred, 1. zadatak
7. Županijsko 2011. A varijanta - 2. razred, 1. zadatak
8. Županijsko natjecanje 2019., SŠ A, 2. razred, 3. zadatak
9. Državno 2007. A varijanta - 1. razred, 1. zadatak
10. Županijsko 2010. A varijanta - 2. razred, 2. zadatak
11. Državno 2019. A varijanta - 3. razred, 4. zadatak
12. Državno 2006. A varijanta - 1. razred, 2. zadatak
13. Europski Matematički Kup 2021., Juniori - 1. zadatak
14. Županijsko natjecanje 2019., SŠ A, 4. razred, 4. zadatak
15. Državno 2021. SŠ, Zadatak A - 1.4.