C	seniorska grupa

Pripreme za državno
Zagreb, travanj 2023.

Komba mix

Matej Vojvodić

12. 4. 2023.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Zadaci

1. Kamenčić se nalazi u gornjem desnom kutu pravokutne šahovske ploče dimenzije $m \times n$. Laura i Mateo pomiču naizmjence pomiču kamen proizvoljan broj polja dolje ili ulijevo. Pobjeđuje igrač koji kamen pomakne u donji lijevi kut. Ako je Laura prva na potezu, pronađi sve parove (m, n) za koje ima pobjedničku strategiju.

2. Lucija je na poklon dobila 17 prirodnih brojeva takvih da niti jedan nema prosti faktor veći od 7. Pokaži da može odabrati neka dva različita broja tako da im umnožak bude potpun kvadrat.

3. Na turniru sudjeluje 2048 tenisača i svaki je odigrao protiv svakog drugog jednom i meč je završio nečijom pobjedom. Pokaži da je moguće pronaći 12 igrača tako da je prvi od njih pobjedio sve ostale, drugi sve osim prvog, treći sve osim prva dva...

4. 2023 kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitima ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne. Koliko ima rasporeda gdje su sve ostale omotnice unutar najveće?

5. Neka je $k > 1$ prirodan broj. Dano je $k + 2$ međusobno različitih prirodnih brojeva manjih od $3k + 1$. Dokaži da među njima postoje dva čija je razlika veća od k i manja od $2k$.

6. U jednoj državi između svaka dva grada postoji jednosmjerna avionska linija. Dokaži da je moguće krenuti iz nekog grada i obići sve gradove tako da niti jedan grad ne posjetimo dvaput.

7. Lucija najprije postavlja skakača na bilo koje polje šahovske ploče dimenzije 8×8. Zatim ga Ivan pomakne kako se inače skakač pomiče u šahu. Nakon toga naizmjence pomiču skakača, ali ne na polje na kojem je već bio. Tko ne može povući potez, gubi. Tko ima pobjedničku strategiju?

8. U sobi je $2n + 1$ ljudi, gdje je n prirodan broj. Za svaku skupinu od najviše n ljudi postoji osoba izvan te skupine koja ih sve poznaje. Dokažite da postoji osoba koja poznaje sve ostale u sobi.

9. Dana je ploča dimenzija 2020×2022. Za dva polja te ploče kažemo da su susjedna ako imaju zajedničku stranicu ili se nalaze na početku i kraju istog retka ili stupca. Dakle, svako polje ima točno četiri susjedna polja.

   Fran u svakom koraku bira jedno polje ploče i na ploču postavlja pet žetona: po jedan na odabrano polje i na svako polje susjedno odabranom. Nakon konačnog broja takvih koraka, na svakom polju nalazi se točno d žetona. Odredi najmanji mogući d.

10. Radek i Senya igraju naizmjence igru na setu S. S prije prvog poteza sadrži sve prirodne brojeve manje od 2023. U jednom potezu, igrač bira $k \in S$ i miče sve njegove djelitelje iz S. Gubitnik je onaj koji ne može napraviti potez. Ako Radek ide prvi, tko pobjeđuje?

11. Particija broja n je svaki set prirodnih brojeva u kojem je zbroj elemenata jednak n. Pokaži da postoji jednako mnogo particija na točno k dijelova i particija kojima je najveći dio točno k.

12. Dokažite da svaki konveksni mnogokut površine 1 možemo prekriti pravokutnikom površine 2.

Hintovi

1. Što za $n \times n$ ploče?
2. Promotri rastav brojeve na proste faktore. Koji je nužan i dovoljan uvijet da nešto bude kvadrat?
3. Nađi igrača koji je pobijedio barem polovicu: što vrijedi za one koje je on pobjedio?
4. Gdje se može nalaziti najmanja omotnica?
5. Uzmi da je 1 u skupu.
6. Indukcija
7. Popločavanje
8. Koja je najveća grupa ljudi u kojoj se svi poznaju?
9. $d = 5$
10. Bez komentara, pošto se radi o zadatku iz MBL QQ.
11. Nacrtaj particiju i nakrivi glavu. :)
12. Uzmi najdulju dijagonalu.

Rješenja

1. Ako je ploča kvadratna, pobjeđuje drugi igrač jer samo "kopira" poteze drugog igrača vraćajući ga na dijagonalu. Ako ploča nije kvadratna, pobjeđuje prvi igrač tako da u prvom potezu poziciju svede na kvadratnu ploču.

2. Svaki od navedenih brojeva oblika je $x = 2^a 3^b 5^c 7^d$. Dakle, da bi umnožak dva broja bio potpuni kvadrat, onda svaka potencija u umnošku mora biti parna. Drugim riječima, umnožak dva broja će biti potpuni kvadrat samo ako su potencije istih prostih brojeva iste parnosti. Kako promatramo skup od 4 prostih brojeva, i svaka potencija može biti parna ili neparna, ima $2^4 = 16$ mogućnosti. Kako brojeva ima više $(16 < 17)$, postoje neka dva koji imaju potencije iste parnosti za svaki od brojeva, pa će njihov umnožak sigurno dati potpun kvadrat.

3. Primijetimo da kada bi turnir imao samo dva igrača, možemo uzeti ta dva i poredati ih da je prvi pobijedio drugoga. Neka nam to bude baza indukcije.

Nadalje, neka nam je pretpostavka indukcije da od 2^n igrača možemo pronaći $n+1$ koji zadovoljavaju uvjet zadatka.

Promotrimo skup od 2^{n+1} igrača. Među njima postoji pobjednik turnira koji je pobijedio barem 2^n igrača (jer ako je svatko pobijedio najviše $2^n - 1$ igrača, lako se pokaže da je broj bodova manji od broja mečeva). Pa, uzmimo pobjednika i skup igrača koje je on pobijedio.

Primijetimo da po pretpostavci indukcije, kako je skup tih igrača veličine barem 2^n, postoji $n+1$ koje možemo poredati. Tim igračima dodajemo na prvo mjesto pobjednika turnira, pa sada imamo skup od $n+2$ učenika koji zadovoljavaju uvjet zadatka.

Kako je $2048 = 2^{11}$, onda očito postoji $11 + 1 = 12$ igrača koji zadovoljavaju uvijet zadatka.

4. državno 2014, SŠ2A, 5

5. Državno 2019. A-1.4.

6. Zadatak ćemo riješiti indukcijom po broju čvorova u grafu. Baza je kad je jedan čvor. Po pretpostavci znamo da u svakom grafu s n čvorova postoji Hamiltonov put. Dodajmo još jedan čvor u taj graf i povežimo ga nekako u taj Hamiltonov put. Ako je brid iz njega u početni čvor puta usmjeren prema početnom čvoru puta gotovi smo. Isto vrijedi i ako je brid iz njega u završni čvor puta usmjeren prema njemu, a od završnog čvora.

U suprotnom moraju postojati dva susjedna čvora u Hamiltonovom putu takva da postoji brid iz ranije posjećenog u dodani čvor i brid iz dodanog čvora u kasnije posjećeni. Ovo znači da možemo na tom mjestu ubaciti dodani čvor u Hamiltonov put. Ovime je proveden korak indukcije.

7. Pretpostavimo da je prvi igrač postavio svog skakača na dopušteno polje. Drugi igrač može staviti svog skakača osnosimetrično položaju posljednje postavljenog skakača s obzirom na pravac koji leži između 4. i 5. stupca. Sada je drugi igrač taj koji nakon svog poteza održava simetriju ploče!

Ako je prvi igrač postavio svog skakača, možemo garantirati dvije stvari: to je polje bilo slobodno i nije ga napadao niti jedan od ranije postavljenih skakača. Zbog simetrije, polje na koje drugi igrač želi postaviti skakača zasigurno je također prazno i ne napada ga niti jedan od skakača, osim možda upravo postavljenog jer je taj jedini postavljen u međuvremenu. Budući da je stanje na ploči simetrično u odnosu na pravac osne simetrije, osnosimetrična polja moraju biti u istom redu, a kako skakač sigurno ne napada niti jedno polje u istom redu, drugi igrač sigurno može postaviti skakača na željeno polje.

Dakle, Ivan uvijek može igrati ako Lucija može igrati, pa po ranijem dokazanom Ivan pobjeđuje jer sigurno ima potez koji može igrati.

8. Konstruiramo graf na uobičajeni način. Neka je C najveća klika u tom grafu, te k njezina veličina. Ako vrijedi $k < n$, onda postoji čvor izvan C, povezan sa svim čvorovima iz C (jer C možemo nadopuniti do proizvoljnog skupa veličine n na kojeg primijenimo pretpostavku zadatka), što znači da postoji veća klika.

Dakle, postoji klika veličine barem $n+1$. No, promatrajući skupinu najviše preostalih n ljudi koji nisu u kliki (ponovo, skup dopunimo po potrebi proizvoljnim osobama), postoji neka osoba koja ih sve poznaje. Ta osoba je u kliki i pozna sve koji nisu u kliki, pa onda poznaje sve ostale.

9. Državno 2022. A-4.5.

10. Bez komentara, pošto se radi o zadatku iz MBL QQ.

11. Promatrajmo jedan način da se zapiše particija od n na točno k dijelova. Neka je to skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Definirajmo sada niz b tako da je b_1 broj brojeva u a većih ili jednakih od 1, b_2 broj brojeva u a većih ili jednakih od $2\ldots$

Primijetimo da je $b_1 = k$, te vrijedi $b_{i+1} \leq b_i$. Također, lagano se pokaže da a_i doprinosi za po jedan brojevima $b_1 \ldots b_{a_i}$, tj. $\sum a = \sum b$. Dakle, skup b je način da napravimo particiju od n gdje je najveći (b_1) dio jednak točno k.

Dakle, za svaki niz a postoji jedinstven niz b. Slično možemo pokazati da za svaki niz b postoji jedinstven niz a, tj. postoji bijekcija između traženih particija (te je svaki skup konačan), pa skupovi moraju biti jednakobrojni.

12. Od svih dužina čiji su vrhovi vrhovi mnogokuta, odaberimo najdužu, neka je to dužina $\overline{AB}$. Nađimo točke koje su najudaljenije od pravca AB sa svake strane tog pravca. Razlikujemo 2 mogućnosti: da su sve točke s iste strane pravca AB i da nisu. U oba slučaja treba pokazati da trokut, odnosno četverokut koji te točke čine možemo prekriti pravokutnikom površine dvostruko veće od tog lika.

Pretpostavimo da se ostali vrhovi mnogokuta nalaze s obiju strana pravca AB. (Drugi slučaj se pokaže slično.) Neka su točke C i D najudaljenije od pravca AB, svaka sa svoje strane tog pravca, i neka su od tog pravca redom udaljene za c i d. Također, označimo $|AB| = a$. Sada je $P_{ACBD} = P_{ABC} + P_{ABD} = \frac{ac}{2} + \frac{ad}{2}$. Pravokutnik konstruiramo na sljedeći način: povucimo paralele s AB kroz C i D, te povucimo paralele s visinom iz C u $\triangle ABC$ kroz A i B. Ta 4 pravca formiraju pravokutnik koji sadrži četverokut $ACBD$ i površine je $a(c+d) = 2P_{ACBD}$, što smo i htjeli.

Nazovimo pravokutnik koji smo konstruirali s P. Pokažimo da su sve točke mnogokuta sadržane u P. Radi jednostavnosti, postavimo koordinatni sustav s centrom u A, te neka je x-os pravac AB (apscisa točke B neka je veća od 0, te neka je ordinata točke C manja od 0, a točke D veća od 0). Pretpostavimo da postoji točka E koja je vrh mnogokuta, a ne nalazi se u P. Ona sigurno nema veću ordinatu od točke D, ili manju od točke C, jer bi bila udaljenija od njih u odnosu na pravac AB. Pretpostavimo da ima manju apscisu od točke A (analogno pokazujemo ako ima veću apscisu od B). Tada je kut $\angle EAB$ sigurno tupi, pa se nasuprot njega nalazi najveća stranica u $\triangle ABE$, a to je $\overline{BE}$. No, tada je $|BE| > |AB|$, a to je u suprotnosti s činjenicom da smo dužinu $\overline{AB}$ uzeli kao najdužu. Dakle, E se zaista ne može nalaziti izvan pravokutnika P.

Sada kad smo pokazali da se cijeli mnogokut nalazi u P ostaje pokazati da se cijeli četverokut $ACBD$ nalazi unutar mnogokuta. Pretpostavimo suprotno, tj. neka se točka F nalazi unutar $ACBD$, ali ne i unutar mnogokuta. Naš mnogokut je konveksan, a kako su A, B, C, D vrhovi mnogokuta, onda su po definiciji konveksnosti i dužine $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AD}, \overline{BD}$ u cijelosti u tom mnogokutu. Povucimo proizvoljan pravac kroz F; on će sigurno sjeći stranice četverokuta u 2 različite točke. No, te točke su na stranicama četverokuta, pa se nalaze u mnogokutu, a kako je mnogokut konveksan, onda se i dužina kojoj su te 2 točke krajnje nalazi u cijelosti u tom mnogokutu. Međutim, F se nalazi na toj dužini, a po pretpostavci nije unutar mnogokuta, pa je to kontradikcija.

Dakle, četverokut $ACBD$ se nalazi u potpunosti unutar mnogokuta, pa je $P_{ACBD} \leq P_{mnogokut} = 1$. Stoga je $P_P \leq 2$, pa sigurno postoji i pravokutnik površine točno 2 koji prekriva zadani mnogokut.