

J	Juniori grupa
----------	------------------

Pripreme za državno
Zagreb, travanj 2023.

Zabavni Geometrija mix

Luka Mialčić
14.4.2023.



Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Sretno na državnom - Luka Mialčić

Zadaci

- Unutar trokuta ABC nalaze se točke S i T . Udaljenost S od pravaca AB , BC i AC su redom 10, 7 i 4. Udaljenost točke T od tih istih pravaca su redom 4, 10 i 16.
Odredi polumjer trokuta ABC -ove upisane kružnice.
- Dan je trapez $ABCD$ ($AB \parallel DC$). Simetrala kraka \overline{BC} siječe krak \overline{AD} u točki M , a simetrala \overline{AD} siječe \overline{BC} u N . Neka su O_1 i O_2 središta kružnica opisanih ABN i CDM .
Dokaži da pravac O_1O_2 prolazi polovištem \overline{MN} .
- Dan je promjer \overline{AB} kružnice ω sa središtem O , OC je polumjer okomit na AB , neka je M neka točka na dužini \overline{OC} i neka je N drugi presek ω sa AM . Neka je P presjek tangenti iz N i B kružnice ω . Dokaži da je $MOPN$ tetivni četverokut.
- Dan je trokut ABC tako da vrijedi $\angle B = \angle C = 40^\circ$. Simetrala kuta $\angle ABC$ siječe \overline{AC} u točki D . Dokaži da je $|BD| + |AD| = |BC|$.
- a) Dan je trokut ABC i njemu opisana kružnica k . Neka je M polovište luka BC bez točke A . Neka je I središte upisane kružnice.
Dokaži da je $|MB| = |MC| = |IM|$

b) Ako vrijedi $|AB| = |AC|$, neka je točka P isto na luku BC bez A . I neka su I_B i I_C središta upisanih od trokuta ABP i APC .
Dokaži da je $I_B I_C M P$ tetivan četverokut.
- Točka O je smještena u unutrašnjosti paralelograma $ABCD$ tako da $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.
Dokaži da $\angle OBC = \angle ODC$.
- Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC . Kružnica opisana trokutu ABH siječe S i siječe dužinu BC u točkama B i D . Neka je P presjek pravaca DH i dužine \overline{AC} , te neka je Q središte opisane kružnice trokuta ADP .
Dokaži da je $BDQS$ tetivan četverokut.
- Dan je trokut ABC . Kružnica k izvana dodiruje \overline{BC} u točki K te produžetke stranica \overline{AB} i \overline{AC} preko točaka B i C redom u točkama L i M . Kružnica s promjerom \overline{BC} siječe dužinu \overline{LM} u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q .
Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k .
- Tetive \overline{BC} i \overline{DE} kružnice ω sijeku se u A . Pravac kroz D paralelan s \overline{BC} siječe ω u F i FA siječe ω u T . Neka je M presjek \overline{ET} i BC , a neka je N preslika A preko M .
Dokaži da opisana kružnica trokuta DEN prolazi kroz polovište \overline{BC} .

Rješenja

1. 2017 Državno 2. razred 2. zadatak
2. 2018. Državno 2. razred 3. zadatak
3. 2013 JBMO Shortlist G1
4. 2014 JBMO Shortlist G1
5. 2016 USAJMO Problem 1 Samo da napomenem , ja sam dao točku M , a u pravom zadatku se mora naći, pod a) dio zadatka googlaj "incenter construction".
6. Canadian MO 1997 Problem 4
7. 2016 Državno 3. razred 4. zadatak
8. 2017 Državno 2. razred 4. zadatak
9. Sharygin Geometry Olympiad, First Round 2013, Problem 21