Državno pripreme - G

Krunoslav Ivanović

20. travnja 2022.

Ideja današnjeg predavanja je proći kroz najčešće pristupe rješavanju zadataka iz geometrije koji se pojavljuju na državnim natjecanjima. Naravno, o ovim metodama ne trebamo razmišljati kao da su disjunktne nego jedna drugu upotpunjuju, tako da je najbolje dobro poznavati sve metode.

1. Fantomska točka

Početi ćemo s jednim poznatim primjerom.

Primjer 1.1. Dan je trokut $\triangle ABC$. Neka se simetrala stranice $\overline{BC}$ i simetrala kuta $\angle BAC$ sijeku u S. Dokaži da S leži na kružnici opisanoj trokutu $\triangle ABC$.

Rješenje 1.1. Uočimo da ako ovo probamo direktno dokazati, nećemo uspjeti. Naime, teško je povezati simetralu stranice i simetralu kuta te kuteve koji bi nam bili potrebni za tetivnost. Upravo u takvim situacijama koristimo fantomsku točku.

Naime, definirajmo točku S' kao presjek simetrale kuta $\angle BAC$ i opisane kružnice trokutu $\triangle ABC$. Htjeli bi pokazati da točka S' leži na simetrali stranice $\overline{BC}$ i onda bi vrijedilo $S' \equiv S$.

Kako je S' na kružnici i na simetrali kuta, imamo

$$\angle SCB = \angle SAB = \angle SAC = \angle SBC,$$

dakle, $|SB| = |SC|$ što smo htjeli i pokazati. Kako je presjek dvaju pravaca jedinstven, imamo da je $S' \equiv S$.

$\square$

Glavna ideja u ovom primjeru je da redefiniramo točke, odnosno, imali smo situaciju

$$\begin{aligned} S&: \text{ na sim. stranice } \overline{BC}, \text{na sim. kuta } \angle BAC \implies \text{na opisanoj kružnici } \triangle ABC \\ S'&: \text{ na opisanoj kružnici } \triangle ABC, \text{na sim. kuta } \angle BAC \implies \text{na sim. stranice } \overline{BC}. \end{aligned}$$

Pri tome je ključno da bilo koja dva od ovih svojstava u načelu[1] jedinstveno određuju točku, odnosno, ako za točku S' pokažemo da vrijedi navedena implikacija, znat ćemo da je $S' \equiv S$ pa će onda i za točku S vrijediti sva tri svojstva.

Naravno, prepoznati ovakav slučaj „u divljini" je mnogo teže jer u načelu imamo puno više točaka, pravaca i kružnica, no neki indikator za fantomsku točku jest situacija gdje je naša točka dana s neka dva svojstva i dokazujemo da zadovoljava i treće, a standardnim metodama nikako ne možemo povezati dva svojstva u definiciji točke. Tada se isplati provjeriti možemo li koristiti fantomsku točku i ako možemo, olakšava li ona zadatak.

Proći ćemo kroz još dva primjera.

Primjer 1.2. Dan je šiljastokutan trokut $\triangle ABC$ sa središtem opisane kružnice O. Neka je K točka takva da je $\overline{KA}$ tangenta na kružnicu (ABC) i $\angle KCB = 90°$. Točka D leži na dužini $\overline{BC}$ tako da je $\overline{KD} \parallel \overline{AB}$. Dokažite da pravac DO prolazi kroz A.

[1] presjek simetrale stranice i kružnice nije nužno jedinstven

Rješenje 1.2. Definirajmo D' kao $AO \cap BC$ i želimo pokazati da je $KD' \parallel AB$. No, lagano vidimo da je četverokut $AKCD'$ tetivan + angle chase.

$\square$

Primjer 1.3 (Državno 2017. 2. razred)**.** Dan je trokut $\triangle ABC$. Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M. Kružnica s promjerom $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{LM}$ u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q. Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k.

Rješenje 1.3. Pogledajte službeno rješenje.

$\square$

2. Standardna oprema

Pod „standardnom opremom", promatramo sve jednostavnije planimetrijske metode.

2.1. Sličnost i sukladnost

Za sličnost i sukladnost ste čuli već u osnovnoj školi, no, uvijek je važno biti svjestan da mogu biti potrebni u zadacima, posebno sličnost.

2.2. Angle chasing, tetivni četverokuti, tangente

U geometrijskim zadacima, ključno je pokušati odrediti sve kuteve na skici. Naravno, često neke kuteve ne možemo jednostavno odrediti, no neke kuteve ipak možemo. Ideja angle chasinga je iterativno određivati kuteve na skici, koristeći nekoliko metoda. Naravno, najelementarnije metode su korištenje činjenice da je suma kuteva u trokutu jednaka $180°$ ili teoremi o kutevima s paralelnim/okomitim krakovima dok kompleksnijim metodama smatramo poučak o tetivi i tangenti te tetivne četverokute.

U idealnom svijetu, u prvom prolazu kroz skicu ćemo koristiti elementarne metode, nakon tog uočiti neke tetivne četverokute pa njih iskoristit, pa nakon tog uočit neke nove tetivne četverokute i tako dalje sve dok ne dobijemo dovoljno informacija o zadatku da ga možemo riješiti. Naravno, svijet nije idealan i često ovaj proces ne ide glatko, no vrlo često je **nužan** za riješiti zadatak.

- tetivan četverokut, obodni/središnji kutevi
- tetiva i tangenta

2.3. Potencija točke

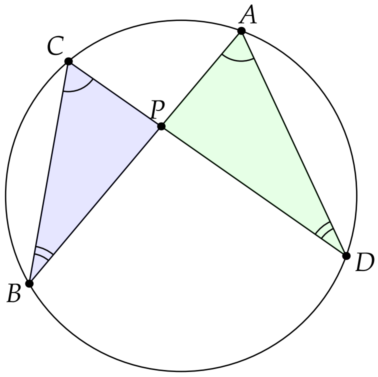
Potencija točke je moćan alat koji nam daje vezu između duljina dužina i tetivnosti.

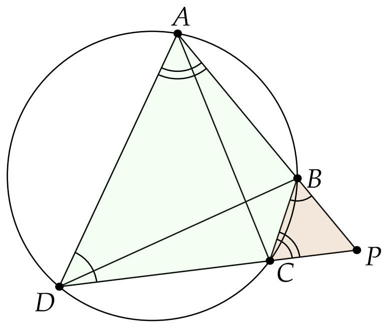
Teorem 2.1 (Potencija točke)

Neka je Γ kružnica i P točka. Jedan pravac kroz P siječe Γ u točkama A i B, a drugi pravac kroz P siječe Γ u točkama C i D. Vrijedi

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja, ovisno o tome je li točka P unutar ili izvan kružnice.





U prvom slučaju, trokuti $\triangle APD$ i $\triangle PBC$ su slični pa imamo

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \implies PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

U drugom slučaju su trokuti $\triangle PBC$ i $\triangle APD$ slični pa imamo

$$\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PD} \implies PA \cdot PB = PC \cdot PB.$$

□

Sada kada vidimo da ima je umnožak duljina odsječaka pravca kroz točku na kružnici fiksan, ima smisla definirati taj izraz kao **potenciju točke** P na kružnicu Γ. Valja istaknuti i slučaj u kojem je $B = A$, odnosno, kada je jedan od odabranih pravaca tangenta na kružnicu i onda imamo

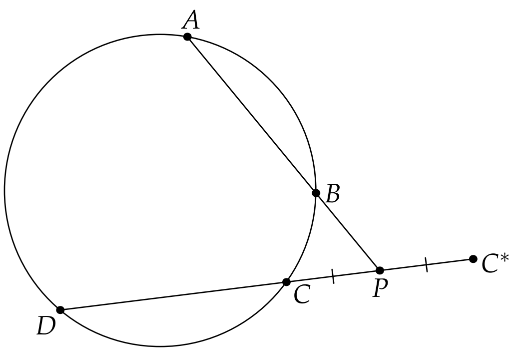
$$PA^2 = PC \cdot PD.$$

Vrijednost potencije točke je u sljedećem teoremu:

Teorem 2.2 (Obrat potencije točke)

Neka su A, B, C i D četiri različite točke i neka se pravci AB i CD sijeku u P. Pretpostavimo da P ili leži unutar obje dužine, ili niti unutar jedne. Onda su točke A, B, C, D konciklične ako i samo ako je $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Dokaz. Ovdje nećemo dokazivati teorem u potpunosti jer dokaz nije pretjerano kompliciran te je dobra vježba, no istaknuti ćemo sljedećim primjerom zašto postoji uvjet da je P ili na obje, ili niti unutar jedne dužine.



Uočimo da vrijedi $PA \cdot PB = PC^* \cdot PD$, no točke A, B, C^* i D očito nisu konciklične. □

Posljednja stvar koja nas zanima vezana uz potenciju točke je postoji li još neki način da je izrazimo i odgovor je potvrdan. Prije svega, uvedimo oznaku $\text{Pow}(P, \Gamma)$ koja predstavlja potenciju točke P na kružnicu Γ. Iznos potencije točke je onaj već poznati iznos, a dogovorno uzimamo da ima negativan predznak ako je točka unutar kružnice, a pozitivan predznak ako je točka izvan kružnice. Ako je točka na kružnici, onda joj je potencija jednaka nuli.

Nakon uvođenja ovih oznaka, možemo uočiti da je

$$\text{Pow}(P, \Gamma) = |OP|^2 - R^2$$

pri čemu je O središte kružnice Γ, a R radijus te kružnice. Za vježbu to pokušajte i dokazati. (Hint: iskoristite da je $\text{Pow}(P, \Gamma) = |PT|^2$ gdje je T dirалište tangente iz P na kružnicu Γ.

3. Radikalna os

Zamislimo da imamo dvije kružnice ω_1 i ω_2 s radijusima r_1 i r_2. Zanima nas za koje točke ravnine vrijedi da je $\text{Pow}(P, \omega_1) = \text{Pow}(P, \omega_2)$. Upravo ovdje ćemo iskoristiti prethodnu definiciju potencije točke.

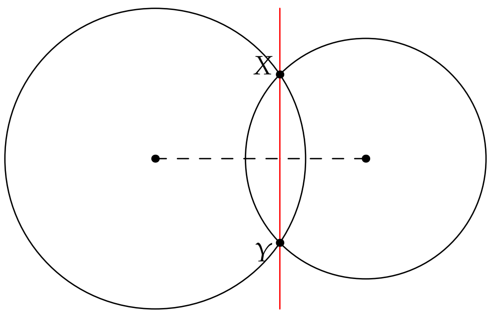
$$\text{Pow}(P, \omega_1) = \text{Pow}(P, \omega_2) \implies |O_1P|^2 - {r_1}^2 = |O_2P|^2 - {r_2}^2$$

iz čega vidimo da je

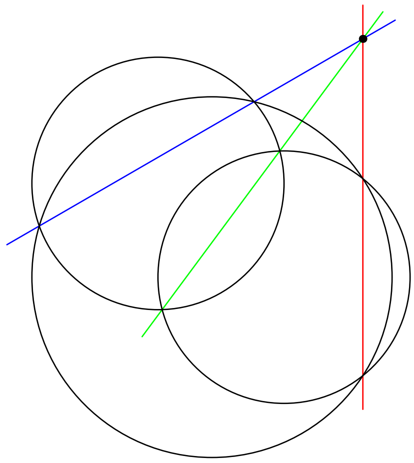
$$|O_1P|^2 - |O_2P|^2 = {r_1}^2 - {r_2}^2 = \text{konst.}$$

Da se dokazati da sve točke P za koje vrijedi gornje svojstvo leže na pravcu okomitom na O_1O_2.

Naravno, pravac je definiran sa dvije točke, pa ako imamo slučaj da se kružnice ω_1 i ω_2 sijeku, lokus svih točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice je upravo pravac XY. Generalno, pravac na kojem se nalaze sve točke koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice nazivamo **radikalna os**.



Također, definirati ćemo i **radikalno središte** triju kružnica. To je točka u kojoj se sijeku radikalne osi svake dvije. Ta točka postoji (ako središta nisu kolinearna) jer ako presiječemo dvije radikalne osi, znamo da ta točka ima jednaku potenciju na prvu i drugu te na prvu i treću pa time i na drugu i treću pa leži na radikalnoj osi.



Uočimo da egzistencija radikalnog središta daje jednostavan način za konstrukciju radikalne osi dvaju kružnica koje se ne sijeku. Naime, uzmemo treću koja siječe obe, nađemo radikalno središte te spustimo okomicu na spojnicu središta.

3.1. Konfiguracije

Pod konfiguracijama mislimo na najpoznatije „postavke" zadataka, odnosno, situacije koje se pojavljuju u velikom broju zadataka. Na primjer, znamo da vrijede razne činjenice o ortocentru, upisanoj kružnici, pripisanoj kružnici itd. Naravno, prepoznavanje konfiguracije nam značajno olakša zadatak jer „besplatno" dobijemu neke tvrdnje. Na ovom predavanju ne stignemo se podsjetiti svih konfiguracija, no možete pogledati MNM online predavanja o njima[2].

3.2. Zadaci

Zadatak 3.1. Simetrala kuta $\angle BAC$ u trokutu $\triangle ABC$ siječe nasuprotnu stranicu u točki S. Točka T je polovište stranice $\overline{BC}$. Kružnica opisana trokutu $\triangle AST$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, a stranicu $\overline{AC}$ u točki E. Dokažite da je $|BD| = |CE|$.

Rješenje 3.1. Pogledamo potenciju točaka B i T na kružnicu $(ADSTE)$. Imamo

$$BD \cdot BA = BS \cdot BT \quad \text{i} \quad CE \cdot CA = CT \cdot CS.$$

Ako podijelimo ova dva izraza, dobivamo

$$\frac{BD}{CE} \cdot \frac{BA}{CA} = \frac{BS}{CS}.$$

Naravno, poznata nam je lemma o simetrali kuta pa znamo da je

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BS}{CS},$$

dakle, $BD = CE$.

□

Zadatak 3.2. Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta $\triangle ABC$ i neka je E točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $\angle EDA = \angle ABC$. Točkom E povučena je paralela s $\overline{BC}$ koja siječe $\overline{AD}$ u točki F. Dokažite da je $|AF| \cdot |DF| = |EF|^2$.

[2] najčešće su ortocentar, pripisana kružnica i upisana kružnica

Rješenje 3.2. Označimo s G presjek pravca EF i dužine AB. Zbog činjenice da je D polovište $\overline{BC}$ i $EF \parallel BC$, imamo da je F polovište $\overline{EG}$. Dakle, u zadatku treba dokazati da je

$$AF \cdot DF = EF^2 = EF \cdot FG,$$

što bi mogli direktno dobiti kao potenciju točke F na kružnicu $(AGDE)$. Naravno, preostaje za dokazati da je to kružnica, no, uočimo da je

$$\angle ADE = \angle ABC = \angle AGE$$

pri čemu prva jednakost vrijedi iz uvjeta, a druga iz paralelnosti. Dakle, četverokut je tetivan pa traženu jednakost dobivamo iz potencije točke.

□

Zadatak 3.3. Neka su k_1 i k_2 koncentrične kružnice, pri čemu je k_2 unutar k_1. Iz točke A na k_1 povukli smo tangentu AB na k_2 $(B \in k_2)$. Neka je C druga točka presjeka pravca AB s k_1 i neka je D polovište $\overline{AB}$. Pravac kroz A siječe k_2 u točkama E i F tako da se simetrale dužina $\overline{DE}$ i $\overline{CF}$ sijeku u točki M koja se nalazi na AB. Nađite $\frac{AM}{MC}$.

Rješenje 3.3. Neka je O zajedničko središte kružnica k_1 i k_2. Znamo da je točka B polovište tetive AC. Uočimo da je

$$AE \cdot AF = AB^2 = \frac{AB}{2} \cdot 2AB = AD \cdot AC,$$

što znači da je četverokut $CDEF$ tetivan. To znači da je točka M zapravo središte opisane kružnice tom četverokutu pa je točka M polovište dužine CD. Sada lagano izračunamo sve duljine i dobijemo da je $\frac{AM}{MC} = \frac{5}{3}$.

□

4. Trigonometrija

Dva fundamentalna teorema koja ćemo koristiti u trigonometrijskom pristupu geometriji su sinusov i kosinusov poučak. Naime, oni pružaju direktnu vezu između kuteva trokuta i duljina njegovih stranica. Van ta dva teorema, naravno, korisno je znati algebarski dio trigonometrije u slučaju da postoji potreba za redukcijom trigonometrijskih izraza, no u načelu, ništa posebno nije potrebno. S obzirom da ne postoji neka pretjerano duboka teorija iza trigonometrijskog pristupa geometriji, podsjetit ćemo se ta dva osnovna teorema te ćemo proći kroz niz primjera u kojima možete vidjeti kako pristupiti takvim zadacima.

Ono što je važno za istaknuti jest da sve „alternativne" metode u geometriji najbolje funkcioniraju u kombinaciji s klasičnim pristupom geometriji, odnosno, na zadacima je korisno prvo provesti standardne geometrijske metode poput angle chasea, traženja tetivnih četverokuta, traženja potencije točke i sličnog te tek onda kada dobijemo neku ekvivalentnu i „direktniju" trvdnju za dokazat, njenom dokazu pristupiti trigonometrijski.

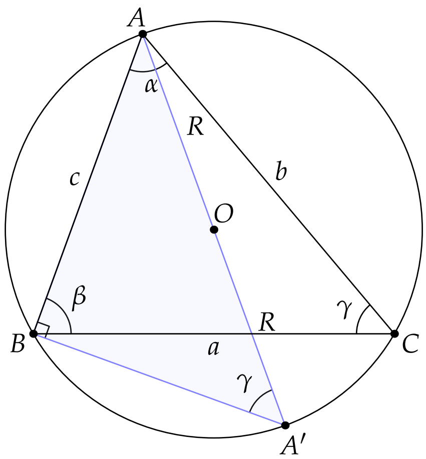
Naravno, postoje i izuzeci. Naime, na natjecanjima se nerijetko pojave zadaci koji su upravo namješteni da budu riješeni trigonometrijski, na primjer, zadaci u kojima se izrazi treća stranica trokuta kao funkcija prve dvije te je potrebno naći odgovarajuće relacije među kutevima trokuta i sl. U takvim zadacima je ponekad nemoguće izbjeći trigonometrijski račun koji često zna bit „kompliciran" i „ružan", no, naravno, uz vježbu naučite rješavati i takve zadatke.

Naposljetku, podsjetimo se ta dva centralna teorema.

Teorem 4.1 (Sinusov poučak)
Neka je dan trokut $\triangle ABC$ s duljinama stranica a,b i c te kutevima α, β i γ. Ako je R radijus opisane kružnice, onda vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Dokaz. Slijedimo skicu.



Neka je točka A' preslika točke A preko središta opisane kružnice O. Prema Talesovom teoremu, znamo da je trokut $\triangle ABA'$ pravokutan s pravim kutom pri vrhu B te zbog činjenice da su kutevi $\angle BA'A$ i $\angle BCA$ obodni nad istim lukom, imamo da je $\angle BA'A = \gamma$. Zbog toga imamo

$$\sin\gamma = \sin\angle BA'A = \frac{|AB|}{|AA'|} = \frac{c}{2R}.$$

Potpuno analogno dobivamo i ostale jednakosti. □
Naravno, očito je da sinusov poučak daje

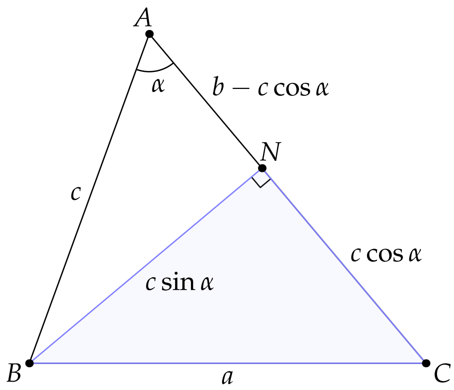
$$\frac{a}{2R} = \sin\alpha$$

te analogno za ostale stranice/kuteve.

Teorem 4.2 (Kosinusov poučak)
Neka je dan trokut $\triangle ABC$ s dujlinama stranica a,b i c te kutevima α, β i γ. Onda vrijedi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Dokaz. Opet, slijedimo skicu.



Neka je N nožište visine iz B na $\overline{AC}$. Zbog činjenice da je trokut $\triangle ANB$ pravokutan, imamo $|NB| = c\sin\alpha, |NA| = c\cos\alpha$. Kako je i trokut $\triangle BNC$ pravokutan, vrijedi Pitagorin poučak, odnosno,

$$\begin{aligned}|BC|^2 &= |BN|^2 + |NC|^2\\ a^2 &= (c\sin\alpha)^2 + (b - c\cos\alpha)^2\\ a^2 &= c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + b^2 - 2bc\cos\alpha\\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.\end{aligned}$$

Ostale jednakosti se analogno dokažu. □

Također, očito je da kosinusov poučak možemo izraziti kao

$$\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

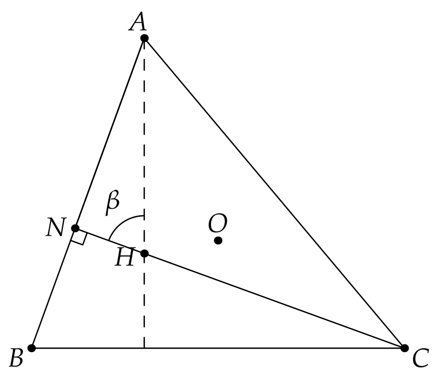
te analogno za ostale stranice/kuteve.

Glavna heuristika pri rješavanju će nam biti da odredimo neku strategiju pristupa zadatku (na primjer, odlučimo da neku duljinu želimo izraziti putem trigonometrije) te onda pokušati napraviti sve u našoj moći da to i napravimo. Naravno, ovisno o odabiru, naš pristup neće uvijek proći, no, kroz vježbu stječemo iskustvo koje pomaže pri određivanju „realnosti” očekivanja.

4.1. Zadaci

Primjer 4.1 (Državno 2007.). U šiljastokutnom trokutu $\triangle ABC$ udaljenosti od vrha A do središta opisane kružnice i ortocentra su jednake. Koliki je kut $\angle BAC$?

Rješenje 4.1. Opet, slijedimo skicu.



Lagano se pokaže da je kut $\angle AHN = \beta$. Zbog toga imamo

$$\sin\beta = \frac{AN}{AH} \implies AH = \frac{AN}{\sin\beta} = b\cos\alpha \cdot \frac{2R}{b} = 2R\cos\alpha.$$

Naravno, kako je $AH = AO = R$, dobivamo

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \implies \alpha = 60^\circ$$

jer je α šiljast.

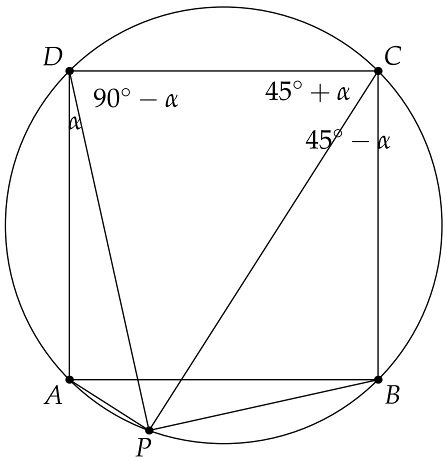
$\square$

Alternativno, zadatak se može riješit i planimetrijski, . . .

Primjer 4.2 (Državno 2004.)**.** Neka je $ABCD$ kvadrat i P točka na kružnici opisanoj kvadratu na luku AB koji ne sadrži točku C. Koje vrijednosti može poprimiti izraz

$$\frac{AP+BP}{CP+DP}?$$

Rješenje 4.2. Opet, slijedimo skicu, uz oznaku $\angle PAB = \alpha$.



Laganim angle chaseom (iskoristimo da je $\angle DPC = 45^\circ$) dobivamo gore navedene kuteve. Primjenom sinusovog poučka, dobivamo da je

$$|AP| = 2R \cdot \sin\angle ADP = 2R\sin\alpha$$

te tako i za preostale dužine pa dobivamo

$$\frac{AP+BP}{CP+DP} = \frac{\sin\alpha + \sin 45^\circ - \alpha}{\sin 90^\circ - \alpha + \sin 45^\circ + \alpha}.$$

Raspišemo kuteve preko adicijskih i dobijemo

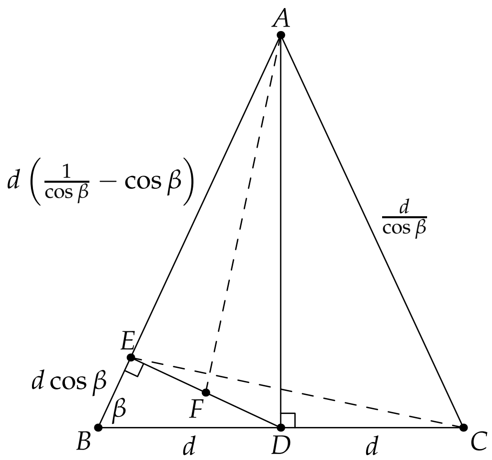
$$\frac{AP+BP}{CP+DP} = \frac{\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)}$$

za što se direktno pokaže da je jednako $\sqrt{2} - 1$ (samo se razmnoži).

$\square$

Primjer 4.3 (Državno 2006.)**.** U jednakokračnom trokutu $\triangle ABC$ s krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, D je polovište osnovice $\overline{BC}$. Neka je točka E nožište okomice iz D na stranicu $\overline{AB}$ te F polovište dužine $\overline{DE}$. Dokaži da je AF okomito na EC.

Rješenje 4.3. Slijedimo skicu, označimo $\angle CBA = \beta$ i $|BD| = d$.



Laganim angle chaseanjem i trigonometrijom pravokutnog trokuta dobivamo sve relacije sa slike. S obzirom da znamo praktički svaku duljinu u trokutu, ideja je iskoristit kriterij ortogonalnosti da bi dokazali da je $CE \perp AF$. Prisjetimo se, kriterij ortogonalnosti nam kaže

$$CE \perp AF \iff FC^2 + AE^2 = FE^2 + AC^2.$$

Uočimo da znamo sve duljine, osim duljine dužine $\overline{CF}$, koju prepoznajemo kao težišnicu u trokutu $\triangle CDE$. Iz poznate[3] formule za duljinu težišnice, imamo

$$FC^2 = \frac{2CE^2 + 2CD^2 - DE^2}{4}.$$

Sada preostaje dokazati tvrdnju zadatka. Imamo

$$\begin{aligned} CE \perp AF &\iff FC^2 + AE^2 = FE^2 + AC^2 \\ &\iff 4FC^2 + 4AE^2 = 4FE^2 + 4AC^2 \\ &\iff 2CE^2 + 2CD^2 - DE^2 + 4AE^2 = DE^2 + 4AC^2 \\ &\iff CE^2 + CD^2 + 2AE^2 = DE^2 + 2AC^2. \end{aligned}$$

Dodatnim sređivanjem i iskorištavanjem relacija iz trokuta, imamo da je okomitost ekvivalentna s

$$CE^2 + d^2 + 2d^2\left(\frac{1}{\cos^2\beta} - 2 + \cos^2\beta\right) = d^2\sin^2\beta + \frac{2d^2}{\cos^2\beta}.$$

Dodatnim sređivanjem, dobivamo da mora vrijediti

$$CE^2 = 3d^2 + d^2\sin^2\beta - 2d^2\cos^2\beta = 4d^2 - 3d^2\cos^2\beta$$

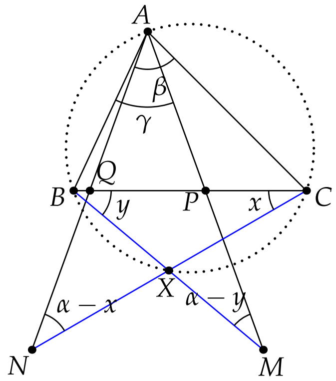
što je upravo ono što dobijemo da vrijedi primjenom kosinusovog poučka na trokut $\triangle BCE$.

$\square$

Primjer 4.4 (IMO 2014. 4.). Točke P i Q leže na strani $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta $\triangle ABC$ tako da je $\angle PAB = \angle BCA$ i $\angle CAQ = \angle ABC$. Točke M i N leže na pravcima AP i AQ redom, tako da je P polovište od AM i Q polovište od AN. Dokažite da se pravci BM i CN sijeku na kružnici opisanoj trokutu $\triangle ABC$.

[3] ako vam je nepoznata, probajte je izvesti

Rješenje 4.4. Slijedimo skicu.



Označimo kuteve u trokutu s α, β i γ te označimo $\angle BCX = x$ i $\angle CBX = y$. Laganim angle chasingom vidimo da je $\angle BMA = \alpha - y$ te $\angle CNA = \alpha - x$. Primjenom sinusovog poučka na trokut $\triangle AQN$ dobivamo

$$\frac{CQ}{\sin\beta} = \frac{AQ}{\sin\gamma}.$$

Također, primjenom sinusovog poučka na trokut $\triangle CQN$ dobivamo

$$\frac{CQ}{\sin(\alpha - x)} = \frac{QN}{\sin x}.$$

Kombinirajući dobiveno zajedno s činjenicom da je $|QN| = |AQ|$, dobivamo

$$\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Potpuno analogno, iz trokuta $\triangle CQN$ i $\triangle AQC$ dobivamo

$$\frac{\sin y}{\sin(\alpha - y)} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Kombinirajući te dvije relacije, dobivamo

$$\sin x \sin y = \sin(\alpha - x)\sin(\alpha - y).$$

Prepoznamo da je to ekvivalentno s

$$2\sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y - 2\alpha)$$

što je opet ekvivalentno s $x + y = \alpha$ što je upravo uvjet da točka X leži na kružnici opisanoj trokutu $\triangle ABC$.

□

5. Teži zadaci za one kojima je dosadno

Ovi zadaci su bili predviđeni za one koji su sve od gore navedenog već jako dobro usvojili tako da su u načelu teži nego ono što može doći na državno, najbolja priprema za državno je rješavanje starih natjecanja, a ako želite neke lakše zadatke (dakle primjerenije težini državnog), slobodno se javite.

Zadaci nisu poredani po težini, osim zadnjeg koji je značajno teži od ostalih.

Zadatak 5.1. U trokutu $\triangle ABC$, točke O i I su središta opisane, odnosno, upisane kružnice, a R i r radijusi opisane, odnosno, upisane kružnice. Dokažite da je $OI^2 = R(R - 2r)$.

Zadatak 5.2. Dane su točke A, B i C na kružnici Γ, pri čemu je $AB = BC$. Neka se tangente na Γ u A i B sijeku u D. Pravac DC siječe Γ u točkama C i E. Dokažite da pravac AE raspolavlja dužinu $\overline{BD}$.

Zadatak 5.3. Za dvije tetive AB i CD koje se ne sijeku i varijabilnu točku P na luku AB koji ne sadrži točke C i D, neka su E i F presjeci tetiva PC i AB te PD i AB, redom. Dokažite da vrijednost $\frac{AE \cdot BF}{EF}$ ne ovisi o odabiru točke P. ne ovisi o odabiru točke P.

Zadatak 5.4. Upisana kružnica trokuta $\triangle ABC$ dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u točkama A', B' i C', redom. Okomica iz I na težišnicu iz vrha C siječe pravac $A'B'$ u točki K. Dokaži da je $CK \parallel AB$.

Zadatak 5.5. Neka je $\overline{BM}$ težišnica u pravokutnom trokutu $\triangle ABC$, gdje je $\angle B = 90°$. Upisana kružnica trokuta $\triangle ABM$ dira $\overline{AB}$ i $\overline{AM}$ u točkama A_1 i A_2, a točke C_1 i C_2 su definirane na sličan način. Dokažite da se pravci A_1A_2 i C_1C_2 sijeku na simetrali kuta $\angle ABC$.

Zadatak 5.6. Neka je $ABCD$ jednakokračni trapez u kojem je $AB \parallel CD$. Upisana kružnica ω trokuta $\triangle BCD$ dira $\overline{CD}$ u točki E. Neka je F točka na simetrali kuta $\angle DAC$ takva da je $EF \perp CD$. Neka kružnica opisana trokutu $\triangle ACF$ siječe pravac CD u točkama C i G. Dokaži da je trokut $\triangle AFG$ jednakokračan.

Zadatak 5.7. Dan je $\triangle ABC$ s ortocentrom H. Neka su M, N, P polovišta stranica BC, CA, AB redom. Kružnica s centrom u M radijusa MH siječe BC u A_1 i A_2. Analogno definiramo točke B_1, B_2 i C_1, C_2. Dokažite da su točke $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ konciklične.

Zadatak 5.8. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ četverokut koji nije tetivan. Neka su O_1 i r_1 središte i radijus opisane kružnice trokuta $A_2A_3A_4$. Definiramo O_2, O_3, O_4 i r_2, r_3, r_4 na sličan način. Dokažite da je

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{O_iA_i{}^2 - r_i{}^2} = 0.$$

Zadatak 5.9. Dan je šiljastokutan trokut $\triangle ABC$ sa središtem opisane kružnice O. Pravac AO siječe BC u D. Točke E i F nalaze se na $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom takve da je četverokut $AEDF$ tetivan. Dokažite da duljina projekcije dužine $\overline{EF}$ na dužinu $\overline{BC}$ ne ovisi o odabiru točaka E i F.

Zadatak 5.10. Dan je trokut $\triangle ABC$ sa središtem opisane kružnice O i središtem upisane kružnice I. Za točke D, E i F na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ su takve da vrijedi

$BD + BF = CA$ i $CD + CE = AB$. Kružnice opisane trokutima $\triangle BFD$ i $\triangle CDE$ sijeku se u $P \neq D$. Dokažite da je $OP = OI$.