S	Seniori grupa

Pripreme za državno
Zagreb, travanj 2023.

Neke TB ideje

Krunoslav Ivanović

13. travnja 2023.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

1. Diofantske jedndažbe i neke metode rješavanja

Sada ćemo se na brzinu podsjetiti nekih najpoznatijih metoda za rješavanje diofantskih jednadžbi.

1.1. Faktorizacija

Ideja faktorizacije je svesti jednadžbu na oblik

$$f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdots f_m(a_1, \ldots, a_n) = c,$$

gdje su $f_1, \ldots, f_m$ funkcije u varijablama jednadžbe, a c neka konstanta. Onda iz jedinstvenosti faktorizacije imamo konačno mnogo slučajeva. Često je korisno razmatrati gcd faktora ili neka druga posebna svojstva da si smanjimo broj slučajeva.

Primjer 1.1. Ovisno o broju n, odredite broj rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

u prirodnim brojevima.

Rješenje 1.1. Kada sve razmnožimo, vidimo da je jednadžba ekvivalentna s

$$(x - n)(y - n) = n^2.$$

Sada jasno vidimo da je broj rješenja jednadžbe za $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ jednak broju djeljitelja od n^2, odnosno, $(2\alpha_1 + 1) \cdots (2\alpha_k + 1)$. □

1.2. Kongruencije

Ideja kod kongruencija je koristiti poznate teoreme poput malog Fermatovog, odnosno, Eulerovog da dobijemo neke kongruencije koje će značajno smanjiti prostor rješenja (npr. dobit ćemo da je neka varijabla parna, ili djeljiva s 3 ili neki zaključak tog tipa). Pritom često znaju biti korisni i kvadratni ostaci, ali i druge činjenice iz teorije brojeva.
Često je inspiracija za promatranje modula u eksponentu varijabli koje se pojavljuju. Također, postoje najpoznatije kombinacije, npr. četiri za kvadrate, sedam ili devet za kubove itd.

Primjer 1.2. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^5 - y^2 = 4$.

Rješenje 1.2. Želimo gledati jednadžbu modulo n, pritom pazeći su nam eksponenti 5 i 2. Iz Eulerovog teorema znamo da nam je sve dosta lakše ako eksponent dijeli $\varphi(n)$, odnosno, želimo da $10 \mid \varphi(n)$. Najlakše to postižemo za $n = 11$.
Sada lagano provjerimo i vidimo da gornja jednadžba nikako ne može biti zadovoljena modulo 11 pa tako ni generalno nema rješenja. □

1.3. Veličina

Ideja je ocijeniti veličinu nekih izraza, pri čemu će nam indikator za takve stvari biti da s jedne strane imamo izraze velikog stupnja, a s druge manjeg stupnja. Ograđivanje veličine nam ostavlja konačan broj slučajeva za provjeriti, a ako efektivno ograničimo, taj broj slučajeva će biti malen.

Primjer 1.3. Nađite sve parove prirodnih brojeva (x, y) takve da je $x^3 - y^3 = xy + 61$.

Rješenje 1.3. Nekako intuitivno osjećamo da ako je $x - y$ velik, lijeva strana će biti daleko veća od desne. To nas motivira da uvedemo $d = x - y$ i raspišemo jednadžbu u terminima d i y. Nakon što to napravimo, dobijemo

$$(3d - 1)y^2 + (3d^2 - d)y + d^3 = 61,$$

pri čemu je d nenegativan jer je očito $x \geq y$.
Kako je barem jedan od izraza uz y^2 i y strogo veći od nule, imamo

$$61 \geq d^3 \implies d < 3.$$

Dakle, samo trebamo provjeriti slučaj $d = 1$ i $d = 2$, za koje dobijemo kvadratnu jednadžbu u y koju znamo riješiti! $\square$

1.4. Smještanje među kvadrate

Smještanje među kvadrate iskorištava diskrentu strukturu skupa cijelih brojeva, odnosno, između dvije uzastopne k-te potencije ne mogu postojati druge k-te potencije.

Primjer 1.4. Nađite sve četvorke prirodnih brojeva (x, y, z, w) za koje vrijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z - 1) + 2y(z + 1) = w^2.$$

Rješenje 1.4. Izraz na lijevoj strani nas neodoljivo podsjeća na kvadrat nekog izraza, pa idemo probati namjestiti neka dva kvadrata između koja ćemo smjestit w^2. Nakon eksperimentiranja, vidimo

$$(x + y + z \pm 1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z \pm 1) + 2y(z \pm 1) \pm 2z + 1.$$

Sada lagano vidimo

$$(x + y + z - 1)^2 < w^2 < (x + y + z + 1)^2,$$

dakle $w = x+y+z$. Sada jednostavno dovršimo i vidimo da je rješenje $(x, y, z, w) = (m, m, n, 2m+n)$, $m, n \in \mathbb{N}$.

$\square$

1.5. Beskonačan spust

U beskonačnom spustu, koristimo činjenicu da ne postoji beskoanačan niz prirodnih brojeva takav da

$$n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_k > \cdots$$

Ideja je iz bilo kojeg rješenja generirati neko manje ili jednako, što će nas ili dovesti do "stabilizacije"[1], ili do kontradikcije.

Primjer 1.5 (Klasik). Dokažite da diofantska jednadžba $x^2 - 2y^2 = 0$ nema rješenja u prirodnim brojevima.

---

[1] Ako imamo beskonačan niz takav da $n_1 \geq n_2 \geq \cdots$, onda je taj niz nužno od neke točke konstantan. Ovo može pomoći da generiramo sva rješenja, no, nas češće zanima slučaj u kojem dolazimo do kontradikcije.

Rješenje 1.5. Neka je (x_1, y_1) bilo koje rješenje gornjeg sustava. Uočimo da je

$$x_1{}^2 - 2y_1{}^2 = 0,$$

pa je x_1 nužno paran. Dakle, $x_1 = 2x_2 \implies x_2 < x_1, x_2 \in \mathbb{N}$. Analogno vidimo da postoji y_2 prirodan takav da $y_1 = 2y_2$. Dakle, iz rješenja (x_1, y_1) dobijemo rješenje (x_2, y_2) takvo da je $x_1 > x_2$. Potpuno analogno možemo dobiti (x_3, y_3), (x_4, y_4) i tako dalje. Dakle, dobijemo beskonačan niz

$$x_1 > x_2 > \cdots,$$

što je kontradikcija, dakle, početna pretpostavka je bila pogrešna, to jest, ne postoji rješenje gornjeg sustava. □

Zadaci

Zadaci su otprilike poredani po težini.

1. Nađite sve parove (p, q) prostih brojeva takvih da vrijedi

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

2. Nađite sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) takve da vrijedi

$$5a^2 + 9b^2 = 13c^2.$$

3. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$m^2 = n^4 + n^2 + 1.$$

4. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 + \cdots + x_{14}{}^4 = 1599.$$

5. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2.$$

6. Nađite sve uređene parove prirodnih brojeva (x, y) takvih da je

$$x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2.$$

7. Nađite sve prirodne brojeve x i y takve da je

$$3^x - 2^y = 7.$$

8. Nađite sve prirodne brojeve x i y takve da je

$$2^x - 3^y = 7.$$

9. Nađite sve trojke (x, y, z) nenegativnih cijelih brojeva takve da je

$$5^x 7^y + 4 = 3^z.$$

10. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi a i b takvi da vrijedi

$$(n^2+2)^a = (2n-1)^b.$$

Teži zadaci

11. Nađite sve prirodne brojeve n za koje postoji n-torka prirodnih brojeva $(k_1, \dots, k_n)$ takva da vrijedi

$$k_1 + \cdots + k_n = 5n - 4$$

te

$$\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

12. Neka su n i p prirodni takvi da je p prost i $n^2 + 11 = p$. Dokažite da tada $n + 4$ nije kub.

13. Nađite sve cijele brojeve a, b, x, y različite od nule takve da je

$$\begin{aligned} ax - by &= 16, \\ ay + bx &= 1. \end{aligned}$$

14. Nađite sve proste brojeve p takve da broj

$$3^p + 4^p + 5^p + 9^p - 98$$

ima najviše 6 pozitivnih djeljitelja.

15. Na ploči je napisano $n > 3$ prirodnih brojeva, manjih od $(n-1)!$. Za svaki par brojeva, Ivan podijeli veći s manjim te na papir napiše kvocijent (npr. za 100 i 7, pišemo $14 = 100 \div 7$). Je li moguće da su na papiru svi brojevi različiti?

Hintovi

1. Gledaj module.

2. Beskonačni spust.

3. Smjesti među kvadrate.

4. Gledaj module.

5. Smjesti među kvadrate.

6. Uvedi $d = \gcd(x, y)$ i stavi $x = da$, $y = db$.

7. Gledaj module.

8. Gledaj module.

9. Gledaj module.

10. Uoči da $n^2 + 2$ i $2n - 1$ nužno imaju iste proste faktore. Koji to prosti faktori mogu biti?

Teži zadaci

11. Ograniči na veličinu!

12. Prisjeti se faktorizacije $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

13. Igraj se s izrazima da se izraz transformira u nešto ljepše i korisnije.

14. Mali Fermatov teorem.

15. Razmisli o veličini.

Rješenja

Za teže zadatke nisam u potpunosti detaljno raspisao rješenja tako da ako budete imali problema, slobodno se javite.

1. Ako pogledamo modulo 3, vidimo da nužno jedan od brojeva mora biti jednak tri. Dalje je jednostavno.

2. Baltic way 2021.

3. Smještamo među kvadrate. Naime, uočimo da nas desna strana podsjeća na $(n^2+1)^2$. Ako je $n \neq 0$, vrijedi
$$(n^2+1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1 > n^4 + n^2 + 1 = m^2 > n^4 = (n^2)^2.$$
Dakle, kandidat za rješenje postoji samo kada je $n = 0$, i tada je $m = 1$ ili $m = -1$.

4. Promatramo jednadžbu modulo 16. Laganim raspisivanjem vidimo da četvrte potencije mogu davati ostatak nula ili jedan pri dijeljenju s 16 i onda očito slijedi da naša jednadžba nema rješenja.

5. Uočimo da je jednadžba zapravo
$$y^2 = x(x+8)(x+1)(x+7) = (x^2+8x)(x^2+8x+7) = z^2 + 7z,$$
gdje smo sa z označili $z = x^2 + 8x$. Ako je $z > 9$, vrijedi
$$(z+3)^2 < z^2 + 7z = y^2 < (z+4)^2,$$
dakle, tada nemamo rješenja. Dakle, jedini kandidati postoje kada je $x^2 + 8x \leq 9$, odnosno, $-9 \leq x \leq 1$. Sada lagano provjerimo tih 10 slučajeva.

6. BMO 2017

7. Prvo, pretpostavimo da je $y \geq 3$. Tada, gledajući modulo 8, vidimo da $3^x \equiv 7 \pmod 8$, no, znamo da potencije broja 3 daju ostatke 1 ili 3 pri dijeljenju s 8. Dakle, ili je $y = 1$ ili je $y = 2$, što lagano provjerimo.

8. Austrian - Polish 1993.

9. Očito je ili x ili y različit od nula. Gledajući jednadžbu modulo 4, vidimo da je z nužno paran. Stavimo $z = 2z_1$, gdje je z_1 nenegativan cijeli broj te onda jednadžbu možemo napisati kao
$$5^x 7^y = (3^{z_1} - 2)(3^{z_1} + 2).$$
Oba faktora na desnoj strani su djeljivi samo potencijama brojeva 5 i 7, a kako im je razlika 4, nužno su relativno prosti. Dakle, imamo dva slučaja
$$1^\circ \begin{cases} 3^{z_1} + 2 = 5^x \\ 3^{z_1} - 2 = 7^y \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} 3^{z_1} - 2 = 5^x \\ 3^{z_1} + 2 = 7^y \end{cases}$$
U prvom slučaju, ako je $y \geq 1$, oduzmemo dvije jednadžbe i dobijemo $5^x - 7^y = 4$. Gledajući modulo 7, dobijemo da je x paran, odnosno, $x = 2x_1$, no, onda
$$7^y = (5^{x_1} - 2)(5^{x_1} + 2),$$
što je nemoguće. Dakle, $y = 0$ i onda očito $z_1 = 1$ te $x = 1$.

U drugom slučaju, opet oduzimamo i dobijemo
$$7^y - 5^x = 4.$$
Gledajući modulo 5, dobijemo da y mora biti paran, i onda istim argumentom kao u prethodnom slučaju dobijemo da nema rješenja.

10. MEMO test 2017.

Teži zadaci

11. Koristimo CSB (ili AH) da bi vidjeli

$$(k_1 + \cdots + k_n)\left(\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right) \geq n^2.$$

Dakle, nužno je $5n - 4 \geq n^2$, odnosno, $n \leq 4$.

U slučaju kada je $n = 4$, imamo jednakost u $A - H$ nejednakosti, dakle, svi članovi moraju biti jednaki, odnosno, jedino rješenje je $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4$.

U slučaju kada je $n = 3$, imamo $k_1 + k_2 + k_3 = 11$ pa je najveći od njih ili 2 ili 3. Sada provjerimo oba ta slučaja, a ostane nam klasična diofantska.

U slučaju kada je $n = 2$ ili $n = 1$ imamo klasičnu diofantsku.

12. Pretpostavimo suprotno, odnosno, da $n + 4 = x^3$. Uvrštavajući to u uvjet, dobijemo

$$p = x^6 - 8x^3 + 27.$$

Voljeli bi faktorizirati izraz na desnoj strani, s obzirom da na lijevoj strani imamo prost broj. Koristimo ideju iz hinta, odnosno, uočimo da je

$$p = x^6 - 8x^3 + 27 = (x^2)^3 + x^3 + 3^3 - 3 \cdot x^2 \cdot x \cdot 3 = (x^2 + x + 3)(\cdots).$$

Sada se lagano dovrši.

13. Baltic way 2021.

14. Turska

15. Rusija