Algebra

Patrik Papac

11.04.2023.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Polinomi

1. Neka su r_1, r_2 i r_3 korijeni polinoma $5x^3 - 11x^2 + 7x + 3$. Odredi $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$.

2. Za polinom stupnja n vrijedi $P(x) = \frac{x}{x+1}$ za $x = 0, 1, 2, ..., n$. Odredi $P(n+1)$.

3. Neka je f polinom drugog stupnja. Dokaži da postoje polinomi g i h, također drugog stupnja tako da je

$$f(x)f(x+1) = g(h(x)).$$

Nejednakosti

4. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a}{a^2 - bc + 1} + \frac{b}{b^2 - ca + 1} + \frac{c}{c^2 - ab + 1} \geq \frac{1}{a + b + c}.$$

5. Neka su x, y, z realni pozitivni brojevi za koje je $\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \leq x + y + z$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{x^2 + y + z} + \frac{1}{y^2 + z + x} + \frac{1}{z^2 + x + y} \leq 1$$

6. Za prirodni broj n dokaži da vrijedi

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) ... \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{5}{2}$$

7. Neka su $a, b, c, d, e, f, g \geq 0$ takvi da je $a + b + c + d + e + f + g = 1$. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza:

$$\max\{a + b + c, b + c + d, c + d + e, d + e + f, e + f + g\}$$

Nizovi

8. Dokaži da je

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

9. Odredi sve realne brojeve a_0 tako da niz definiran s

$$a_{n+1} = 2^n - 3a_n \quad n = 0, 1, 2, ...$$

bude strogo rastući.

10. Zadan je niz realnih brojeva i $n \in \mathbb{N}$ tako da je $a_0 = \frac{1}{2}$ i

$$a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n} \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Dokaži da vrijedi

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

Funkcije

11. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x^2+y) = f(x^{27}+2y) + f(x^4)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

12. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

13. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} - \{0,1\} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + \frac{1}{x(1-x)}$ za sve $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$.

14. Odredite sve injektivne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$\left|\sum_{i=1}^{n} i\left(f(x+i+1) - f(f(x+i))\right)\right| < 2016$$

za sve realne brojeve x i sve prirodne brojeve n.

15. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

za sve prirodne brojeve m, n.

Zadaci za samostalan rad

16. Zadan je niz

$$a_n = 2 - \frac{1}{n^2 + \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}}, \quad n \geq 1.$$

Dokaži da je broj

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + ... + \sqrt{a_{119}}$$

cijeli.

17. Neka su a, b, c, d realni brojevi takvi da je $b - d \geq 5$ i svi korijeni x_1, x_2, x_3, x_4 polinoma $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ su realni. Pronađi najmanju vrijednost umnoška

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1).$$

18. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1.$$

Dokažite da vrijedi

$$a + b + c \geq ab + bc + ca$$

19. Za niz realnih brojeva $a_1, a_2, ..., a_n$ vrijedi $a_1 = 0$ i

$$|a_i| = |a_{i-1} - 1| \quad i = 2, 3, ..., n.$$

Dokaži da vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}.$$

20. Neka je $P(x)$ nekonstantni polinom takav da

$$(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$$

za svaki realni x, i $P(2)^2 = P(3)$. Odredi $P(\frac{7}{2})$.

Rješenja

1. Koristimo identitet $a^3+b^3+c^3 = 3abc + (a+b+c)((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca))$ i Vietove formule iz čega se direktno može dobiti rješenje.

2. USAMO 1975

3. Ako je $f(x) = a(x-r)(x-s)$ onda možemo lijevu stranu raspisati u

$$f(x)f(x+1) = a^2((x-r)(x-s)+x-r)((x-r)(x-s)+x-r)$$

, pa očito polinomi $g(x) = a^2(x-r)(x-s)$ i $h(x) = (x-r)(x-s)+x$ zadovoljavaju uvjete zadatka.

4. Primjenimo CSB u Engel formi, s tim da prvo proširimo razlomke. Dobijemo da je

$$LHS \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum a^3 - abc + a} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)+1)} = \frac{1}{a+b+c}.$$

5. Primjenimo CSB na nazivnik

$$(x^2+y+z)(1+y+z) \geq (x+y+z)^2$$

stoga treba dokazati

$$1 \geq \frac{1}{(x+y+z)^2}\sum 1+y+z = \frac{3+2s}{s^2}$$

što raspisom postaje

$$(s-3)(s+1) \geq 0$$

odnosno treba pokazati

$$s = x+y+z \geq 3.$$

Ovo ćemo pokazati iz danog uvjeta zadatka. Imamo koristeći uvjet, CSB i na kraju AG:

$$(x+y+z)^2 \geq (x+y+z)\sum \frac{x}{yz} \geq (\sum \sqrt{\frac{x}{z}})^2 \geq 9.$$

6. Očito direktna indukcija ne radi jer desna strana ostaje konstantna a lijeva se povećava. Za $n=1$ se tvrdnja lako provjeri. Sada pokušamo dokazati jaču tvrdnju, za $n \geq 2$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^i}\right) \leq \frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

što se lako pokaže indukcijom. Korak indukcije se svodi na dokazivanje

$$\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

7. Recimo da je M traženi maksimum. Imamo

$$3M \geq (a+b+c)+(c+d+e)+(e+f+g) = 1+c+e \geq 1$$

$$M \geq \frac{1}{3}$$

što se postiže za $b=d=f=1/3$ i $a=c=e=g=0$.

8. IMO 1964

9. Britain 1980

10. https://alexanderrem.weebly.com/uploads/7/2/5/6/72566533/sequences.pdf

11. Uvrstimo $y = x^2 - x^{27}$, pa dobijemo $f(x^4) = 0$, odnosno $f(x) = 0$ za pozitivne x. Sad uvrstimo $y = 0$ pa dobijemo da je i za negativne $f(x) = 0$. Uvrštavanjem provjerimo da $f = 0$ jest rješenje.

12. Funkcija je očito bijekcija. Neka je $f(c) = 0$ za neki c. Uvrstimo sad prvo $x = 0$ pa $x = c$. Usporedbom te dvije jednadžbe injektivnost daje $f(0) = 0$. Sada imamo $f(f(x)) = x$, pa uvrstimo $f(x)$ umjesto x. Desna strana ostaje nepromijenjena, odakle slijedi

$$f(f(x)^2 + f(y)) = f(x^2 + f(y))$$

odakle iz injektivnosti dobivamo $f(x)^2 = x^2$ za sve x. Pretpostavimo sada da za neke $0 \neq a \neq b \neq 0$ vrijedi $f(a) = a$ i $f(b) = -b$. Uvrstimo $x = a$ i $y = b$ pa dobivamo

$$f(a^2 - b) = a^2 + b$$

, no kako je $f(x) = \pm x$ ovo daje kontradikciju. Sada možemo provjerit da su rješenja jednadžbe $f(x) = x$ za sve x ili $f(x) = -x$ za sve x.

13. Uvrstimo $\frac{1}{1-x}$ umjesto x. Ako to ponovimo ukupno 2 puta dobijemo 3 jednadžbe s 3 nepoznanice koje se mogu riješiti.

14. Balkan 2010

15. IMO SL 2013

16. Titu Andrescu, Mathematical Olympiad Treasures, Problem 1.70

17. USAMO 2014

18. CSB na nazivnik uvjeta daje

$$(a + b + 1)(a + b + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

pa imamo

$$(a + b + c)^2 \leq \sum 2a + a^2$$

odakle slijedi traženi uvjet.

19. Titu Andrescu, Mathematical Olympiad Treasures, Problem 1.46

20. AIME 2017