Kombinatorika

Mislav Brnetić
12. travnja 2023.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

Neke korisne ideje koje se često mogu iskoristiti u kombinatornim zadacima su:

- Dirichletov princip
- matematička indukcija
- bojanja (npr. šahovsko bojanje)
- invarijante i monovarijante
- dvostruka prebrojavanja

Također, bitno je napomenuti da, u slučaju kada je potrebno odrediti najmanji broj n koji zadovoljava neki uvjet (npr. kao u zadatku 11.), potrebno je zapravo dokazati dvije stvari:

(1) kako određeni n (za koji dokazujete da je rješenje) zadovoljava taj uvjet te

(2) kako svaki m manji od n ne zadovoljava taj uvjet (u nekim situacijama moguće protuprimjerom).

Zadaci

1. Na ploči su zapisana 502 prirodna broja. Dokažite da među među njima postoje dva čiji su zbroj ili razlika djeljivi s 1000.

2. Na otoku Velika Hrid živi 8 plavih, 10 crvenih i 12 zelenih kameleona. Kada se susretnu dva kameleona različitih boja, oni mijenjaju svoje boje u treću boju. Može li se dogoditi da, poslije izvjesnog broja susreta, svi kameleoni budu istobojni?

3. Sto kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitima ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne.

Koliko ima različitih rasporeda u kojima se unutar najveće omotnice nalaze sve ostale?

4. Vlatka i Vlatko igraju igru s pravokutnom pločom i žetonima oblika kruga međusobno istog radijusa. U potezu je dozvoljeno staviti jedan žeton na ploču tako da se ne preklapa s ostalima te da se nalazi u cijelosti unutar ploče. Igrač koji više ne može postaviti žeton na ploču gubi.

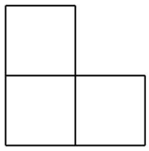
Ako Vlatka igra prva, tko ima pobjedničku strategiju?

5. U svaki vrh pravilnog dvanaesterokuta $A_1A_2\dots A_{12}$ upisan je ili broj 1 ili broj -1. Na početku je u vrh A_1 upisan broj -1, a u sve ostale vrhove broj 1. Dozvoljeno je istovremeno promijeniti predznak brojeva u bilo kojih šest uzastopnih vrhova tog dvanaesterokuta.

Je li moguće postići da u vrh A_2 bude upisan broj -1, a u sve ostale vrhove broj 1?

6. Na nekom natjecanju svaki učenik riješio je točno tri zadatka, a svaki zadatak riješilo je točno troje učenika. Dokažite da su broj učenika i broj zadataka jednaki.

7. Na koliko načina možemo obojati polja ploče 2×2016 u dvije boje tako da ne postoje tri polja iste boje koja se mogu istovremeno pokriti pločicom oblika kao na slici? Pločicu je dozvoljeno rotirati.



8. Devet 1×1 polja ploče dimenzija 10×10 su obojana crvenom bojom. Svake sekunde polja koja imaju dva ili više zaražena susjeda postaju crvena. Mogu li sva polja ploče postati crvena?

9. Na hrpi je n kamenčića ($n \in \mathbb{N}$). Dvojica igrača s hrpe naizmjence uzimaju m kamenčića ($m \geq 1$), a pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić. Za koje n drugi igrač ima pobjedničku strategiju ako m ne smije biti:

a) složen broj b) prost broj?

10. Dvadeset učenika koji sudjeluju na kampu iz matematike odlučili su međusobno poslati poruke i to svaki od njih točno desetorici preostalih učenika.

Odredite najmanji mogući broj obostranih poruka.

11. Zadana je tablica $5 \times n$ kojoj je svako polje obojano u crvenu ili plavu boju. Nađite najmanji n za koji se uvijek mogu odabrati tri retka i tri stupca takva da je svih 9 polja u njihovom presjeku iste boje.

12. U parlamentu Sikinije svaki član ima najviše tri neprijatelja. Dokažite da se parlament može podijeliti u dva doma tako da svaki član parlamenta ima najviše jednog neprijatelja unutar svog doma.

13. Na natjecanju u kuhanju 8 sudaca ocjenjuje natjecatelje s *prošao* ili *pao*. Poznato je da, za svaka dva natjecatelja, dva sudca su obojicu ocjenila s *prošao*, dva sudca prvog s *prošao*, a drugog s *pao*, dva sudca drugog s *prošao*, a prvog s *pao*, a dva sudca obojicu s *pao*.

Koliki je najveći mogući broj natjecatelja?

14. U utrci sudjeluje 200 biciklista. Na početku utrke biciklisti su poredani jedan iza drugoga. Kažemo da neki biciklist pretječe ako mijenja mjesto s biciklistom neposredno ispred sebe. Tijekom utrke poredak se mijenja samo kad neki biciklist pretječe. Neka je A broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao točno jednom, te neka je B broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao najviše jednom. Dokažite da vrijedi

$$2A = B$$

15. Prirodan broj n je *dobar* ako svaku stranicu i dijagonalu pravilnog n-terokuta možemo obojiti u neku boju tako da za svaka dva vrha A i B postoji točno jedan vrh C, različit od A i B, takav da su dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ obojane istom bojom.

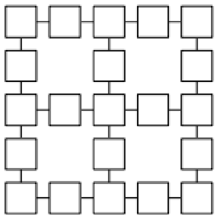
Odredite koji su od brojeva 7, 8, 9, 10, 11 i 12 *dobri*, a koji nisu.

16. Na početku je u svaki od kvadrata raspoređenih kao na slici upisana nula. U svakom potezu odabire se jedan od kvadrata te se istovremeno brojevi koji se nalaze u tom kvadratu i u svim njemu susjednim kvadratima uvećavaju za jedan.

Dokažite da je nakon određenog broja poteza:

a) moguće postići da u svakom kvadratu piše broj 2010,

b) nemoguće postići da u svakom kvadratu piše broj 2011



17. Na PMF-u imamo n profesora i n studenata. Svaki profesor ocjenjuje svakog studenta s *prošao* ili s *pao*. Poznato je da ne postoji par studenata za koje postoji par profesora koji ih je jednako ocijenio. Dokažite da je ukupni broj ocjena *prošao* najviše $\frac{n}{2}(1+\sqrt{4n-3})$.

Hintovi

1. Primijenite Dirichletov princip na odgovarajući način.

2. Nije moguće, potrebno je pronaći invarijantu.

3. Na koliko načina možemo rasporediti 1, 2 ili 3 omotnice? Na koliko načina možemo zatim dodati još jednu omotnicu manju od ostalih?

4. Može li neki igrač oponašati poteze drugog igrača (*simetrija*)?

5. Nije moguće, potrebno je pronaći invarijantu (promatrajte parnost ponavljanja broja -1 u određenim vrhovima).

6. Prebrojite broj ukupnih točnih rješenja zadataka (svaki zadatak koji je riješio neki učenik brojimo jednom za svakog učenika).

7. Na koje sve načine mogu biti obojana polja u prvom stupcu? Kako zatim mogu biti obojani ostali stupci?

8. Koliki je opseg obojanog područja? Kako se mijenja kod širenja?

9. Pokušajte igrati igru s malim primjerima te tako naslutite rješenje i dokažite ga indukcijom.

10. Koliko je ukupno poruka poslano? Koliko ima parova učenika?

11. Pokušajte konstruirati tablicu s najviše stupaca koja u svakom stupcu ima 3 polja jedne boje i 2 polja druge boje, a ne zadovoljava traženi uvjet zadatka. Dokažite da svaka tablica s jednim stupcem više sigurno zadovoljava traženi uvjet.

12. Pretpostavite suprotno te tada promatrajte neku podjelu u kojoj je ukupni broj neprijateljstava minimalan. Je li moguće ostvariti manji ukupni broj neprijateljstava?

13. Prikažite ocjene sudaca tablično (po sucima i natjecateljima).

Dokažite da je traženo rješenje 7.

14. Rekurzivno prikažite vrijednosti A i B za n biciklista.

15. Dokažite da parni brojevi niti brojevi oblika $3k + 2$ nisu dobri.

16.
a) Konstrukcijom prvo dokažite da je moguće postići da u svakom kvadratu piše broj 10.
b) Pronađite odgovarajuću invarijantu kako biste dokazali traženu tvrdnju.

17. Prikažite ocjene u tablici (prema nastavnicima i studentima). Prebrojite broj parova ocjena *prošao* danih od strane istog nastavnika. Koliko najviše takvih parova može biti u cijeloj tablici?

Rješenja

1. Državno natjecanje 2013., OŠ-7.4.

2. Promatrajmo ostatke broja kameleona svake boje pri dijeljenju s 3.

   Na početku brojevi kameleona po bojama daju ostatke 0, 1 i 2 pri dijeljenju s 3. Dokažimo da se to neće promijeniti nakon konačnog broja susreta.

   Primijetimo kako se, kod svakog susreta kameleona različite boje, ostatak pri dijeljenju broja kameleona svake boje smanjuje za 1 ili povećava za 2, odnosno, nakon svakog susreta, brojevi kameleona po bojama i dalje daju tri različita ostatka pri dijeljenju s 3.

   Međutim, kada bi bilo moguće da svi kameleoni nakon nekog broja susreta budu istobojni, broj kameleona svake boje u tom trenutku bi morao biti djeljiv s 3, što smo dokazali da nije moguće.

   Dakle, nije moguće da svi kameleoni nakon konačnog broja susreta postanu istobojni.

3. Državno natjecanje 2014., A-2.5.

4. Želimo dokazati da Vlatka ima strategiju. Ovo je primjer strategije u kojoj jedan igrač samo oponaša strategiju drugoga (*simetrija*).

   Vlatka pritom prvi žeton postavi na sredinu ploče.

   Nakon svakog poteza drugog igrača, svoj žeton postavlja na centralnosimetrično polje u odnosu na sredinu ploče (takvim postavljanjem je i cijela ploča centralnosimetrična pa je to uvijek moguće učiniti).

   Dakle, drugi igrač će u nekom trenutku ostati bez poteza pa pobjeđuje prvi igrač.

5. Županijsko natjecanje 2014., A-3.5.

6. Prebrojimo broj ukupnih točnih rješenja zadataka. Ta vrijednost jednaka je zbroju broja učenika koji su riješili neki zadatak (za svaki zadatak), kao i zbroju broja zadataka koji su riješili učenici (za svakog učenika).

   Označimo broj učenika sa x, broj zadataka s y, a broj točnih rješenja sa S.

   Tada imamo:

   $$S = 3x \text{ svaki učenik je točno riješio po 3 zadatka}$$
   $$S = 3y \text{ svaki zadatak je točno riješilo 3 učenika}$$

   Imamo

   $$3x = 3y \implies x = y$$

   što je i trebalo dokazati.

7. Županijsko natjecanje 2016., A-1.5.

8. Arthur Engel: Problem solving strategies, The Invariance Principle, Problem 43

9. a) Provjerom za male n naslućujemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju za $n = 4k, k \in \mathbb{N}$, a inače prvi.

   Pokažimo to indukcijom s korakom 4. Baza uključuje provjeru za $n = 1, 2, 3, 4$.

   Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve manje ili jednake od $4k$, za neki $k \in \mathbb{N}$.

   Tada ako je broj kamenčića na hrpi na početku $4k + 1, 4k + 2$ ili $4k + 3$, prvi igrač uzme redom 1, 2 ili 3 kamenčića, čime na hrpi ostane $4k$ kamenčića, a po pretpostavci ta pozicija je pobjednička za igrača koji tad nije na redu, dakle za onog koji je prvi uzeo kamenčiće s hrpe.

Za $n = 4k + 4$ prvi igrač ne može uzeti broj kamenčića djeljiv s 4 (jer je to sigurno složen broj), pa će se, štogod odigra, naći u za njega gubitničkoj poziciji.

b) Provjerom za male n naslućujemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju za $n \in \{2, 5, 7\}$, a inače prvi.

Za $n \leq 8$ direktno provjerimo koji igrač ima pobjedničku strategiju.

Pretpostavimo da za neki $k \geq 8$ vrijedi da jedino za $n \in \{2, 5, 7\}$ drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

Dokažimo da za $n = k + 1$ prvi igrač ima pobjedničku strategiju.

Ako je $k + 1$ paran broj, prvi igrač uzme $k - 1$ kamenčić čime ostanu samo 2, pa je to pobjednička pozicija za prvog igrača po pretpostavci indukcije. Inače prvi igrač uzme $k - 4$ ili $k - 6$ kamenčića, ovisno o tome koji od tih brojeva je djeljiv s 4 (čime znamo da je složen), te ostaje 5 ili 7 kamenčića, zbog čega znamo da prvi igrač pobjeđuje.

10. Županijsko natjecanje 2017., OŠ-8.5.

11. Državno natjecanje 2007., A-4.3.

12. Arthur Engel: Problem solving strategies, The Invariance Principle, Primjer E4

13. Ilko Brnetić, Prebrojavanje, 10. zadatak

14. Državno natjecanje 2016., SŠ A-4.5.

15. HJMO 2019., zadatak 2.

16. Državno natjecanje 2010., SŠ A-2.5.

17. Državno natjecanje 2001., SŠ-A 4.4