J1	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2023./24.

Indukcija

Matej Vojvodić

21. 10. 2023.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

---

1. Uvod

Princip matematičke indukcije moćan je i elegantan alat za dokazivanje tvrdnji T_n koje ovise o n za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$. Kod dokazivanja matematičkom indukcijom uz pretpostavku da željena tvrdnja vrijedi za neki proizvoljan prirodan broj k pokazujemo da tada nužno vrijedi tvrdnja i za $k+1$. Ono što nam nedostaje je provjera da za neki prirodan broj tvrdnja stvarno vrijedi (ne pretpostavljamo, nego izravno dokazujemo da vrijedi).

Definicija 1.1: Indukcija

Formalno, matematička indukcija sastavljena je od 3 dijela:

1. **baza** (T_1): pokažemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ ili neki drugi "najmanji slučaj".
2. **pretpostavka** (T_k): pretpostavimo da vrijedi tvrdnja za neki $k \in \mathbb{N}$
3. **korak indukcije** (T_{k+1}): koristeći pretpostavku pokazujemo da tvrdnja vrijedi i za $k+1$

Indukciju možemo vizualizirati dominama - najprije moramo srušiti prvu dominu u nizu, a zatim znamo da će ona srušiti sljedeću, koja će srušiti sljedeću, koja će srušiti sljedeću... i tako će na kraju srušiti sve domine, tj. tvrdnju ćemo pokazati za sve prirodne brojeve.

⚠ Oprez: Provjera baze

Ne smijemo zaboraviti provjeriti vrijedi li baza indukcije. Beskorisno nam je da svaka domina koja se ruši uzrokuje rušenje sljedeće ako nismo uspjeli srušiti prvu.

Osim na skupu prirodnih brojeva indukciju možemo koristiti na konačnim i prebrojivo beskonačnim skupovima (npr. parni prirodni brojevi, cijeli brojevi, prirodni brojevi veći od 3, prosti brojevi), a to će nekada dovesti i do modifikacije baze i/ili koraka indukcije.

Primjer 1 (Gaussova dosjetka)**.** Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokaži: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Rješenje 1. Tvrdnju ćemo dokazati koristeći matematičku indukciju.

B: Provjeravamo tvrdnju za $n = 1$. Očito je $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ pa smo pokazali bazu indukcije.

P: Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 + 2 + ... + k = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$.

K: Želimo koristeći pretpostavku za k pokazati da je $1 + 2 + \cdots + k + k + 1 = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$

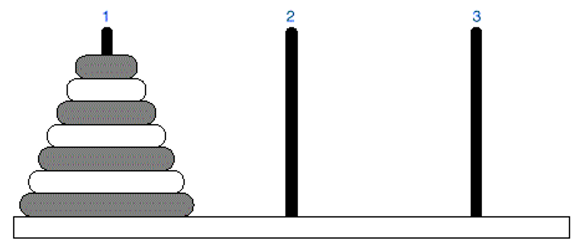
Želimo pokazati da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$. Zato uzimamo pretpostavku i dodajemo joj $k + 1$:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + ... + k &= \frac{k \cdot (k+1)}{2} \qquad \Big/ + (k+1) \\
1 + 2 + ... + k + (k+1) &= \frac{k \cdot (k+1)}{2} + k + 1 \\
1 + 2 + ... + k + (k+1) &= \frac{k \cdot (k+1) + 2(k+1)}{2} \\
1 + 2 + ... + k + (k+1) &= \frac{(k+2) \cdot (k+1)}{2}
\end{aligned}$$

Time smo dokazali korak indukcije pa po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. □

1.1. Istraživački zadatak

Hanojski tornjevi se sastoje od tri tornja, gdje se na prvom nalazi n diskova naslaganih jedan na drugi po veličini tako da je na dnu najveći, a na vrhu najmanji disk. Cilj je prebaciti diskove s prvog na treći toranj tako da u svakom potezu pomičemo *samo jedan* disk te da ni u jednom trenutku ne smijemo staviti veći disk na manji.



Slika 1: Primjer igre za $n = 4$

a) "Riješi" (tj. prebaci sve diskove na zadnji štap) igru za $n = 3, 4, 5$. Koliko ti je poteza trebalo?

b) Možeš li generalizirati rezultat? Koliko ti inače treba poteza da riješiš igru za neki $n \in \mathbb{N}$?

c) Možeš li smisliti algoritam (tj. niz uputa npr. za računalo) koji rješava problem za neki n?

d) Obojimo diskove u dvije boje naizmjence (kao i na slici gore). Što možete zaključiti o bojama diskova tijekom igre (tj. kada možemo koji disk staviti na neki drugi) ?

Kažemo da je pozicija *moguća* ako je poredak diskova na svakom od tornjeva takav da su manji diskovi uvijek iznad većih (tj. da su diskovi na svakom tornju sortirani od manjih prema većima).

e) Je li moguće iz bilo koje *moguće* pozicije završiti igru? Možeš li osmisliti brz algoritam koji određuje je li moguće igru završiti iz neke *moguće* pozicije?

f) Postoji li neka *moguća* pozicija za koju je potrebno više poteza da se završi igra nego od one početne u običnoj igri (tj. svi diskovi na prvom tornju)?

g) Možeš li osmisliti brz algoritam koji određuje u koliko je najmanje poteza moguće završiti igru iz zadane *moguće* poziciju?

Napomena: Za one koji su upoznati s $\mathcal{O}$ oznakom, tražimo algoritam u $\mathcal{O}(n)$.

2. Zadaci

2.1. Ponovimo što smo naučili!

1. Pokaži da je zbroj prvih n neparnih brojeva jednak n^2.

2. Pokaži da je $n! > 2^n$ za sve $n \geq 4$.

3. Dokažite da je $2^n \geq n^2$ za svaki prirodan broj $n \geq 4$.

4. U ravnini je dano n pravaca od kojih se nikoja tri ne sijeku u istoj točki niti su bilo koja dva paralelna. Pokaži da se pravci sijeku u $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.

5. Dokažite da je suma kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednaka $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2.2. Lakši zadaci za probuditi pospane

6. Dokažite da skup od n elemenata ima $2^n - 1$ nepraznih podskupova.

7. U nekoj skupini ljudi neki su se ljudi međusobno rukovali. Dokažite da je broj ljudi koji su se rukovali s neparnim brojem ljudi paran.

8. Neka je x realan broj takav da je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj. Dokažite da je $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj za svaki prirodni broj n.

9. Na koliko najviše područja n pravaca dijeli ravninu?

10. Zadan je niz brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takav da je $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ te $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ za $n \geq 4$. Dokaži da je $a_n < 2^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

2.3. Umjereni zadaci za umjereno razbuđene

11. Dokažite da je $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$ za svaki prirodan broj n.

12. U ravnini je nacrtano n kružnica proizvoljnih polumjera i u proizvoljnom međusobnom položaju. Dokažite da se tako dobivena karta može obojati dvjema bojama tako da se svaka dva susjedna područja obojana različitim bojama.

13. 2048 tenisača sudjelovali su na turniru tako da je svaki od njih igrao protiv svakog od preostalih tenisača. Dokažite da je moguće odabrati njih 12 tako da ih se može poredati u niz na način da je svatko pobijedio sve ljude iza sebe, a izgubio od svih ispred.

14. Neka je n prirodan broj. Dokaži da je $2^n \times 2^n$ ploču s jednim uklonjenim poljem moguće popločati trominama u obliku slova L.

15. Promotrimo sve neprazne podskupove od $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji nemaju uzastopnih brojeva. Za svaki od njih pogledamo kvadrat produkta svih njegovih elemenata. Dokažite da je zbroj tih brojeva jednak $(n+1)! - 1$.

2.4. Teški zadaci koji će vas držati budnima

16. U jednoj državi između svaka dva grada postoji jednosmjerna avionska linija. Dokaži da je moguće krenuti iz nekog grada i obići sve gradove tako da niti jedan grad ne posjetimo dvaput.

17. Dokaži da je moguće brojeve $1, 2, \dots, n$ poredati u niz tako da aritmetička sredina niti jedna dva broja ne bude između njih.

18. Zbog rata u Ukraini nastala je velika nestašica goriva. Na velikoj kružnoj stazi nalaze se benzinske crpke s nekim količinama goriva, no ukupna količina goriva u svim benzinskim crpkama je točno dovoljna za obići cijelu stazu jednom. Pokaži da ako Matej optimalno izabere početnu točku, može obići cijelu stazu.

19. Na otoku živi n domorodaca. Svaka dva su ili prijatelji ili neprijatelji. Jednog dana poglavica naredi svim stanovnicima (uključujući i sebe) da si naprave i da nose kamene ogrlice, tako da svaka dva prijatelja imaju barem po jedan istovrsni kamen u svojim ogrlicama, a da se sva kamenja u ogrlicama dvaju neprijatelja razlikuju. Ogrlica može biti i bez kamenja. Dokažite da se poglavičina zapovijed može izvršiti koristeći najviše $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ različitih vrsta kamenja.

20. Na tavanu se nalazi 1000 staklenki koje sadrže razne količine pekmeza, ali nijedna ne sadrži više od $\frac{1}{100}$ ukupne količine pekmeza u svim staklenkama. Svakog dana potrebno je odabrati 100 staklenki, te se iz svake treba pojesti ista količina pekmeza. Dokaži da je moguće pojesti sav pekmez u konačno mnogo dana.

2.5. Fibonacci fun time

Neka je $F(n)$ niz Fibonaccijevih brojeva definiran kao $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Prvih nekoliko članova niza su $F = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}$.

21. Pokaži da vrijedi $F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-3} + F_{2n-5} + \cdots + F_3 + F_1$.

22. Pokaži da vrijedi $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 2$.

23. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi $F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

24. Pokaži da je moguće svaki prirodni broj n zapisati kao zbroj Fibbonacijevih brojeva tako da se svaki koristi najviše jednom, i ne koriste se dva uzastopna broja iz niza.

25. Dokažite da vrijedi $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$ za svaki prirodan broj n.

3. Hintovi

1. $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

2. $n > 2$ sigurno za sve $n \geq 4$.

3. U koraku indukcije možemo više puta koristiti pretpostavku i isto možemo koristiti da je n za koji smo pretpostavili da vrijedi veći jednak 4.

4. U koliko se točaka sijeku dva pravca koja nisu paralelni? Koliko novih sjecišta ćemo dobiti ako na konfiguraciju od n pravaca dodamo još jedan?

5. Isto ko u uvodu.

6. Koje ćemo sve nove podskupove dobiti ako dodamo još jedan element?

7. Fiksiraj broj ljudi i dodaj rukovanja.

8. Dobiti $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ kao dio izraza dobivenog kao produkt brojeva za koje znamo da su cijeli.

9. Na malim primjerima pogledajte što se dogodi kada na n pravaca dodamo $n+1$.

10. Trebati će pretpostaviti nešto ne samo za n nego i sve ranije.

11. Vidimo da se ovo ne može direktno dokazati indukcijom, pa probajmo ubaciti neki član koji ovisi o n na lijevu stranu kako bi tvrdnja i dalje vrijedila, a kako bi onda ju onda mogli dokazati indukcijom tako kako piše. Znači želimo neki izraz koji ovisi o n za koji će razlika tog izraza za n i $n+1$ biti veća od $\dfrac{1}{n^2}$.

12. U koraku (za $n+1$) promatrajte n kružnica i što se dogodi s bojanjem kad dodamo tu zadnju kružnicu.

13. Generalno vrijedi za 2^n igrača i niz od njih $n+1$.

14. Ploča $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ sastoji se od 4 ploče $2^n \times 2^n$. Kako možete popločati sredinu velike ploče?

15. Pogledajmo kako izračunati sumu za skup $\{1, 2, ..., n+1\}$ tako da posebno gledamo podskupove koji sadrže $n+1$ i koji ne sadrže $n+1$.

16. Dodaj jedan grad: možeš li ga lagano uključiti u prethodno dobiveno rješenje?

> **Lema 3.1: Linolada lema**
>
> Neka je dan proizvoljan niz 0 i 1 koji počinje s 0 i završava s 1.
>
> Tada postoji nula koju odmah slijedi jedinica.

17. Razdvoji brojeve na parne i neparne.

18. U koraku indukcije pretpostavimo da nijedna stanica nema dovoljno goriva da se dođe do sljedeće stanice.

19. Hint 1: Provodimo indukciju po broju domorodaca. Baza indukcije je $n = 1$ i $n = 2$, a želimo dokazati: ako tvrdnja vrijedi za neki k, onda vrijedi i za $k + 2$.
Hint 2: Promotrimo proizvoljan par domorodaca i gledamo kakav može biti njihov odnos (ne/prijateljstvo) s proizvoljnim trećim domorocem.

20. Hint 1: Dokazujemo općenitiju tvrdnju: Neka je m staklenki pri čemu nijedna ne sadrži više od $\frac{1}{n}$ ukupne količine pekmeza u svim staklenkama, uz $n \leq m$. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n.
Hint 2: U koraku indukcije promatramo 2 slučaja - kada je u posudi s najviše pekmeza točno $\frac{1}{n+1}$ ukupne količine pekmeza te kada je u njoj manje od toliko.

21. Iskoristi pretpostavku indukcije i definiciju Fibonaccijevih brojeva.

22. Iskoristi pretpostavku indukcije i definiciju Fibonaccijevih brojeva.

23. Kad radite korak indukcije postupno primjenjujte rekurzivnu formulu za fibonaccijeve brojeve tako da dobijete izraz koji se nalazi u pretpostavci indukcije.

24. U pretpostavci ćemo pretpostaviti da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $k \leq n$, umjesto samo za n i u koraku dokazati za $n + 1$. Za korak uzmimo najveći fibonaccijev broj koji je manji jednak od $n + 1$.

25. Da bi indukcijom dokazali traženu tvrdnju treba nam još jedna slična (pomoćna) tvrdnja. Da bi odredili koja je, raspišimo korak indukcije kako bi inače pa pogledamo što nam nedostaje da dokažemo korak do kraja.

4. Rješenja

1. Baza: $1 = 1^2$.

Pretpostavka: Pokaži da je zbroj prvih n neparnih brojeva jednak n^2 za neki n.

Korak: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$.

2. Baza: $4! = 24 > 16 = 2^4$.

Pretpostavka: $n! > 2^n$ za neki $n \geq 4$.

Korak: $(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

3. Baza $n = 4$: $2^4 \geq 4^2 \iff 16 \geq 16$.
Pretpostavka: vrijedi $2^n \geq n^2$ za neki prirodan broj $n \geq 4$
Korak: dokažimo tvrdnju za $n+1$: $2^{n+1} \geq (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, pa iskoristimo pretpostavku indukcije i imamo $2^{n+1} \geq 2 \cdot n^2$
Sada još želimo dokazati da je $n^2 \geq 2n + 1$ za $n \geq 4$: $n^2 \geq 2n + 1 \iff n^2 - 2n \geq 1 \iff n^2 - 2n + 1 \geq 2 \iff (n-1)^2 \geq 2$ što očito vrijedi za $n \geq 4$, pa onda imamo:
$2^{n+1} \geq 2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

4. Lako se vidi da se svaka dva pravca sijeku. Kada dodamo prvi pravac, dobijem 0 točaka presijeka. Kad dodam drugi pravac, dobijem 1 točku presjeka (točno ta dva pravca). Kad dodam treći pravac, dobijem dvije nove točke presjeka... Kada dodam n-ti pravac, dobijem novih $n-1$ točaka presijeka.

Mogu ponovo indukcijom pokazivati da je ovaj zbroj ono što je traženo u zadatku, ili samo primijeniti zbroj prvih $n-1$ brojeva (tj. Gaussovu dosjetku iz uvoda).

5. Baza $n = 1$: $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

Pretpostavka: vrijedi $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ za neki prirodan broj n

Korak: Dokažimo $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
$1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 =$ [Iskoristimo pretpostavku indukcije za zbroj prvih n] $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{n+1}{6} \cdot (n(2n+1) + 6(n+1)) = \dfrac{n+1}{6} \cdot (2n^2 + 7n + 6) = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

6. Provjerimo bazu i iskažemo pretpostavku. Kada dodamo $n+1$ element, tada on za svaki od $2^n - 1$ skupova stvara po jedan skup koji sada dodatno sadrži taj element, te jedan skup koji sadrži samo taj element. Dakle, postoji $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ podskupova što je trebalo pokazati.

7. Recimo da imamo neki broj ljudi i da se dogodilo n rukovanja, pri čemu indukcija ide po n. Ako se nitko nije rukovao, tada očito vrijedi uvjet zadatka.

Pretpostavimo da se dogodilo n rukovanja i da vrijedi uvjet zadatka. Tada ako se dogodi još jedno rukovanje, ono može biti između dvije osobe s parnim brojem rukovanja (pa se broj ljudi s neparnim broje rukovanja poveća za 2, i ostane paran), između osobe s parnim i neparnim brojem rukovanja (broj se ne promijeni) ili dvije osobe s neparnim brojem rukovanja (pa se broj ljudi s neparnim broje rukovanja smanji za 2, i ostane paran). Dakle, po principu matematičke indukcije vrijedi tvrdnja zadatka.

8. Za sve prirodne brojeve n definiramo $T(n)$: $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ je cijeli broj.
Tvrdnja vrijedi i za $n = 0$, te će to biti dio baze indukcije.
Baza: $n = 0$: $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 2 \in \mathbb{Z}$; $n = 1$: zadano u tekstu zadatka.
Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-2$ i $n-1$ te dokažimo da vrijedi za n.
$x^n + \dfrac{1}{x^n} = (x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}})(x + \dfrac{1}{x}) - x^{n-2} - \dfrac{1}{x^{n-2}}$, pa je traženi izraz cijeli broj jer je umnožak dva cijela broja cijeli broj i onda je od njega oduzet cijeli broj.

Dokazali smo da tvrdnji vrijedi za 0 i 1 te ako vrijedi za $n-2$ i $n-1$ vrijedi za n pa po principu indukcije vrijedi za sve prirodne brojeve (ako vrijedi za 0 i 1 vrijedi za 2, pa vrijedi za 1 i 2 pa vrijedi za 3...).

9. Kada na n pravaca dodajemo $n+1$. vidimo da svaki puta kada taj pravac presiječe neki od postojećih n pravaca, on područje odmah iza tog pravca dijeli na 2 dijela, a tako dijeli i početno područje prije nego presiječe ijedan od pravac, pa ukupno povećava broj područja za $n+1$. Kako on uvijek povećava za najviše $n+1$, onda je najbolje moguće da na maksimalan broj područja s n pravaca dodamo pravac koji stvori još $n+1$ dodatnih područja.
Da bi se to dogodilo samo moramo pripaziti da se nikoja dva pravca ne sijeku u istoj točci jer onda imamo manje od n različitih presjeka novog pravca s starima. Također, naravno da želimo da novi pravac siječe sve stare pa ne smije biti paralelan s nikojim od prošlih.
Znači jedino što trebamo paziti kad radimo korak indukcije je da novi pravac ne prolazi nekim sjecištem dva postojeća pravca i da nije paralelan s niti jednim od njih, a to sigurno možemo jer ima beskonačno smjerova pravaca, a samo konačno smjerova kad bi bio paralelan i konačno točaka koje treba izbjeći. Baza je $n = 0$ i onda je jedno područje.
n-ti pravac povećava broj područja za n, pa s n pravaca imamo maksimalno $1+1+2+3+ \ldots + n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ područja.

10. Tvrdnju dokazujemo jakom indukcijom po n.

Baza indukcije su $n = 1, 2, 3$ jer rekurzivna formula niza za te brojeve nije definirana. Kako je $1 < 2^1 < 2^2 < 2^3$, vrijedi $a_n < 2^n$ za $n \leq 3$ pa je baza dokazana.

Pretpostavimo sada da za $1, 2, ..., k$ vrijedi $a_k < 2^k$, gdje je $k \geq 3$ prirodan broj. Kako je $k+1 \geq 4$, možemo iskoristiti rekurzivnu formulu niza da izrazimo a_{k+1} kao

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + a_{k-2}.$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobivamo nejednakost

$$a_{k+1} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2}.$$

Kako je $2^{k-2} < 2^{k-1}$, dalje vrijedi

$$a_{k+1} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k + 2^k = 2^{k+1},$$

odnosno $a_k < 2^k \implies a_{k+1} < 2^{k+1}$ što smo i htjeli dobiti pa je po jakoj matematičkoj indukciji tvrdnja dokazana.

11. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ neka funkcija koju ćemo kasnije definirati. Želimo da je $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + f(n) \leq 2$ za svaki prirodan broj n, te da je $f(n) > 0$, jer ćemo tada iz ove tvrdnje odmah dobiti traženu tvrdnju zadatka. Recimo da smo provjerili bazu. Pretpostavka će biti da je $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + f(n) \leq 2$ za neki prirodan broj n, te za korak želimo dokazati $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + f(n+1) \leq 2.$

Kad bi imali $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + f(n+1) \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + f(n)$, onda bi direktno imali tvrdnju koraka. Kad skratimo iste članove s obje strane vidimo da f treba zadovoljavati: $f(n) - f(n+1) \geq \frac{1}{(n+1)^2}$, usput vidimo da je f padajuća funkcija. Jedna od najjednostavnijih padajućih funkcija koje su pozitivne za sve prirodne brojeve je $f(n) = \frac{1}{n}$ i vidimo da ona zadovoljava tražene uvjete (Baza $1 + 1 \leq 2$), pa po principu indukcije vrijedi tvrdnja zadatka.

Inače, ova funkcija je nepotrebno jako organičenje, te se indukcijom može pokazati i jače ograničenje od $\frac{7}{4}$. Točna vrijednost zbroja je $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934$

12. Elementarna matematika 1, materijali za vježbe, zadatak 7

13. Pokažimo da vrijedi da među 2^n igrača možemo naći niz od $n + 1$ onih koji zadovoljavaju uvjet zadatka.

Baza: $n = 1$, tj. između 2 igrača, možemo (izabrati 2 i) poredati tu dvojicu tako da je prvi dobio drugog.

Pretpostavka: za neki n možemo među 2^n igrača naći niz od $n + 1$ onih koji zadovoljavaju uvjet zadatka.

Korak: uzmimo "pobjednika" turnira, tj. osobu koja je pobijedila najviše mečeva. Lako se vidi da je ona pobijedila najmanje polovicu igrača. Dakle, ako imamo 2^{n+1} igrača, tada postoje pobjednik i skup od barem 2^n igrača koje je on pobijedio. Tada od tih 2^n možemo izabrati niz od $n+1$ koji zadovoljavaju uvjet zadatka. Dopunimo taj niz tako da pobjednika stavimo na početak niza, onda imamo niz od $n + 2$ igrača koji zadovoljavaju uvjet zadatka.

14. Lako vidimo da ploču 2×2 možemo popločati jednom pločicom koje god polje bilo uklonjeno. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ možemo šahovsku ploču $2^n \times 2^n$ s uklonjenim bilo kojim poljem popločati trominama. Promatramo ploču veličine $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ s uklonjenim nekim poljem. Ona je sastavljena od 4 ploče veličine $2^n \times 2^n$, a uklonjeno polje nalazi se u nekoj od tih četvrtina. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se uklonjeno polje nalazi u gornjoj lijevoj četvrtini, pa tada tu četvrtinu po pretpostavci indukcije možemo popločati trominama. Promotrimo sada 4 polja koja se nalaze točno u sredini velike ploče.

Jedno od njih (gornje lijevo) već smo popločali, pa na preostala 3 možemo pravilno postaviti jednu trominu. Međutim, ta tromina nalazi se u svakoj od preostalih četvrtina ploče (točno s jednim poljem), pa i te četvrtine sada možemo promatrati kao ploče $2^n \times 2^n$ s uklonjenim jednim poljem, a to po pretpostavci znamo popločati trominama. Tako smo popločali cijelu veliku ploču (osim naravno onog jednom uklonjenog polja) pa smo pokazali i korak indukcije.

15. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom pa pogledajmo prvo korak kako bi vidjeli koju pretpostavku, vrstu indukcije i koju bazu trebamo.

Ako posebno promatramo određene vrste podskupova možemo posebno odrediti vrijednost sume za svake vrstu posebno te onda sumirati te sume.

U prvoj skupini će biti oni podskupovi koji ne sadrže $n+1$:
To znači da tražimo neprazne podskupove od $\{1, 2.., n+1\}$ koji nemaju uzastopnih brojeva i ne sadrže $n+1$, odmah vidimo da su to zapravo neprazni podskupovi od $\{1, 2, ..., n\}$ koji ne sadrže uzastopne pa je po pretpostavci indukcije za n ta suma jednaka $(n+1)! - 1$.

Sada promotrimo one podskupove koji sadrže $n+1$, to znači da ne mogu sadržavati n koji je uzastopan njemu. Sada definiramo drugu skupinu podskupova u kojoj će biti oni koji sadrže $n+1$ i još neki element skupa. Ako pogledamo traženu sumu svih takvih podskupova, vidimo da iz svakog sumanda možemo izlučiti $(n+1)^2$ i dobiti sumand od nekog podskupa od $\{1, 2, ..., n-1\}$ koji nema uzastopnih elemenata, te lako vidimo da ćemo dobiti sve takve pa je suma druge skupine jednaka $(n+1)^2\cdot$ vrijednost sume za $n-1$ koja će po pretpostavci indukcije biti $n! - 1$ znači $(n+1)^2(n! - 1)$.

U trećoj skupini su ostali podskupovi koji sadrže samo $n+1$ i ništa drugo tj jedan jedini skup $\{n+1\}$ čija je vrijednost sume $(n+1)^2$.

Sada zbrojimo vrijednosti od sve 3 skupine te imamo: $(n+1)! - 1 + (n+1)^2(n! - 1) + (n+1)^2 = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1$.

Vidimo da nam za indukciju trebaju pretpostavke za $n-1$ i n da dobijemo tvrdnju za $n+1$ pa trebamo provjeriti bazu za dva uzastopna broja tj za $n = 1$ (Jedini podskup je $\{1\}$ i vrijednost je 1) i $n = 2$ (podskupovi bez uzastopnih su $\{1\}$ i $\{2\}$ i vrijednost je 5).

16. Zadatak ćemo riješiti indukcijom po broju čvorova u grafu. Baza je kad je jedan čvor. Po pretpostavci znamo da u svakom grafu s n čvorova postoji Hamiltonov put. Dodajmo još jedan čvor u taj graf i povežimo ga nekako u taj Hamiltonov put. Ako je brid iz njega u početni čvor puta usmjeren prema početnom čvoru puta gotovi smo. Isto vrijedi i ako je brid iz njega u završni čvor puta usmjeren prema njemu, a od završnog čvora.

U suprotnom moraju postojati dva susjedna čvora u Hamiltonovom putu takva da postoji brid iz ranije posjećenog u dodani čvor i brid iz dodanog čvora u kasnije posjećeni. Ovo znači da možemo na tom mjestu ubaciti dodani čvor u Hamiltonov put. Ovime je proveden korak indukcije.

17. Moguće je! Lako provjerimo da je za 2 to moguće, pa indukcijom pokažemo da možemo prijeći iz k u $2k$ i to tako da prvih k brojeva budu neparni, a zadnjih k parni i posloženi analogno rješenju za k. Tada te polovice nemaju konflikte (transformacijama $x \mapsto 2x$ i $x \mapsto 2x+1$ ne kvarimo uvjet prosjeka), a zbroj dva broja iz različitih polovica je neparan pa se njihov prosjek ne nalazi u nizu. Sada možemo napraviti konstrukciju za sve 2^k, a čim to preraste n posložimo te brojeve (za 2^k, gdje je n dovoljno velik) te izbacimo one veće od n i tako dobivamo dobar raspored.

18. Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Jasno je da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ i pretpostavimo da vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Pokažimo tvrdnju za $n+1$.
Ako niti u jednoj stanici nema dovoljno goriva za doći do sljedeće stanice, onda ukupno u svim stanicama nema dovoljno goriva za obići cijeli krug. To znači da barem u jednoj stanici S ima dovoljno goriva za doći do sljedeće. Sada tu sljedeću stanicu "prebacimo" u S te stanici gorivu na S pribrojimo gorivo s prebačene stanice. Ovakvim razmatranjem dolazimo do slučaja u kojem imamo n stanica i ukupno točno onoliko goriva koliko je potrebno za obići stazu, a po pretpostavci indukcije znamo da u tom slučaju tvrdnja vrijedi.

19. Skica rješenja: iz konstrukcije za n pokazujemo za $n+2$ (dakle radimo odvojeno po parnim i neparnim) na način da izdvojimo neki par prijatelja i rastavimo po slučajevima što treće osobe mogu biti njima (i koliko kamenja trebamo).

Najgori slučaj je kada su dvije grupe slične veličine u kojim su svi međusobno prijatelji, te neprijatelji s drugom grupom.

Državno natjecanje 2002. - 3. razred, 4. zadatak

20. Skica rješenja: može se pokazati i jača tvrdnja, tj. da m staklenki pri čemu nijedna ne sadrži više od $\frac{1}{n}$ ukupne količine pekmeza u svim staklenkama, možemo pojesti. Indukciju radimo po n.

U koraku indukcije promatramo 2 slučaja - kada je u posudi s najviše pekmeza točno $\frac{1}{n+1}$ ukupne količine pekmeza u tom trenu te kada je u njoj manje od toliko.

Ako sadrži točno $\frac{1}{n+1}$, onda možemo po pretpostavci indukcije možemo pojesti pekmez iz preostalih jer onda ni jedna druga ne sadrrži više od $\frac{1}{n}$, a u svakom koraku jedemo i iz te označene staklenke (i onda taman pojedemo koliko trebamo).

Ako sadrži manje, onda možemo jesti iz ostalih staklenki tako da postignemo da bude relativno dovoljno puno pekmeza u toj staklenki. Turnir gradova 2005. - jesen, juniori (A-dio), 6. zadatak

21. Provjerimo bazu i formuliramo pretpostavku. Korak:

$$F_{2n+1} + F_{2n-1} + F_{2n-3} + \cdots + F_3 + F_1 = F_{2n+1} + F_{2n} = F_{2(n+1)}$$

22. Provjerimo bazu i formuliramo pretpostavku. Korak:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 2 + F_{n+1} = F_{n+3} - 2$$

23. definiramo $T(n)$: $F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = (-1)^{n-1}$ za prirodan broj n;
Baza: $T(1)$: $F_1 - F_2 \cdot F_0 = (-1)^{1-1} \iff 1 - 1 \cdot 0 = 1$ pa vrijedi.
Pretpostavka: pretpostavimo da vrijedi $T(n)$ za neki prirodan broj n.
Korak: Dokažimo da vrijedi $T(n+1)$:
Želimo dokazati $F_{n+1} - F_{n+2} \cdot F_n = (-1)^{n+1-1}$, pa krenimo od lijeve stane:
$F_{n+1}^2 - F_{n+2} \cdot F_n = [\text{Raspišemo } F_{n+2}] = F_{n+1}^2 - (F_{n+1} + F_n) \cdot F_n = F_{n+1} \cdot (F_{n+1} - F_n) - F_n^2$ $= [F_{n+1} - F_n = F_{n-1}] = F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = -(F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1}) =$ [Koristimo pretpostavku indukcije] $= -1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1-1}$.

24. Skica rješenja: uvijek ćemo uzimati najveći broj koji možemo (tj. koji je manji ili jednak onome što pokušavamo dobiti). Lako se pokaže da ta metoda ne može stvoriti uzastopne brojeve (jer bi onda bilo optimalno uzeti neki veći broj), a principom ekstrema lako možemo dobiti da takav zapis (zbroj) postoji.

Wikipedia: Zeckendorf's theorem

25. Kad bi krenuli raditi indukciju gdje dokazujemo tvrdnju $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$.:
Pretpostavka je $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$ i želimo dokazati $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$, pa raspišimo lijevu stranu tako da se pojave članovi iz pretpostavke indukcije $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) + F_n^2 = F_n^2 + F_{n+1}F_n + (F_n + F_{n-1})F_{n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 + F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} =$ [Iskoristimo pretpostavku indukcije] $= F_{2n-1} + F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1}$ te vidimo kako bismo htjeli da vrijedi $F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_{2n}$ da možemo dovršiti dokaz. To znači da zapravo moramo nekako dokazati i tu činjenicu za svaki prirodan broj n. U ovom slučaju je dobra ideja obje ove tvrdnje dokazivat indukcijom zajedno.
za prirodan broj n definiramo $T(n)$: vrijedi $F_n^2 + F_n - 1^2 = F_{2n-1}$ i vrijedi $F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_{2n}$
Baza: ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$) $n = 1$: $F_1^2 + F_0^2 = F_1$ vrijedi i $F_2F_1 + F_1F_0 = F_2$ vrijedi.
Pretpostavimo da za n vrijedi $F_n^2 + F_n - 1^2 = F_{2n-1}$ i $F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_{2n}$ te trebamo dokazati da vrijede obje ove tvrdnje za $n+1$.
Prva tvrdnja (koju smo već skoro do kraja raspisali ranije):
$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) + F_n^2 = F_n^2 + F_{n+1}F_n + (F_n + F_{n-1})F_{n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 + F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} =$ [Iskoristimo prvu tvrdnju iz pretpostavke indukcije] $= F_{2n-1} + F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1}$ = [Iskoristimo drugu tvrdnju iz pretpostavke indukcije] $F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+1}$.
Druga tvrdnja: $F_{n+2}F_{n+1} + F_{n+1}F_n = (F_{n+1} + F_n)(F_{n+1}) + (F_n + F_{n-1})F_n = F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} =$ [Za prva dva člana koristimo prvu tvrdnju koraka koju smo upravo dokazali, a za ostala 2 člana pretpostavku indukcije] $= F_{2n+1} + F_{2n} = F_{2n+2}$.

4.1. Rješenja istraživačog zadatka

Rješenja za a), b) i c) podzadatke lako možete naći na mnogim online izvorima,
na primjer https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi.
Ukratko skiciran algoritam iz c): u svakom trenutku možemo za svaki disk odrediti koji mu je "ciljani" toranj. Konkretno, to je za najveći disk 3. toranj. Sada, ovisno o tome gdje je najveći disk, za drugi najveći disk je ciljani ili 2. ili 3. toranj - prije nego što sam premjestio najveći disk mi je za njega ciljani 2. toranj (jer želim imati sve diskove osim najvećeg na 2. tornju kako bih mogao najveći prebaciti s prvog na treći toranj), a nakon što sam ga prebacio želim onda i taj disk isto staviti na 3. toranj (da bih završio igru). Tako nastavljam definiciju i za sve manje diskove, i onda mičem najmanji disk koji trenutno nije na svom ciljanom tornju.

d) U optimalnom rješenju nikada nećete staviti disk neke boje (direktno) na disk iste te boje. To možete lako vidjeti i iz algoritma u c). (kako se mijenja ciljani toranj u rekurzivnom algoritmu?)

e) Kao što ime sugerira, sve *moguće* pozicije je moguće završiti (i doći do njih iz početne pozicije). Ponovo se možemo pozvati na algoritam iz c), samo nam *moguća* pozicija koju želimo postići zapravo određuje koji su ciljani toranjovi za svaki od diskova. Dakle, kako je iz početne pozicije moguće doći do te *moguće*, onda je moguće se istim nizom poteza (unazad) vratiti u početnu i iz nje doći u završnu (što neće biti optimalno skoro nikada, ali garantira da je moguće završiti igru).

f) Ne, ali to će zapravo slijediti iz g). Ako promotrite opisani algoritam, vidimo da je najveći mogući broj poteza

$$\sum_{k\in\mathbb{I}} 2^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

.

g) Prisjetimo se algoritma iz c) i modificirajmo ga. Idemo po diskovima od najvećeg do najmanjeg (označimo ih brojevima od $0, 1, \ldots n-2, n-1$; ova oznaka će postati jasna kada vidimo koliko točno poteza nam treba za riješiti poziciju). Promatrajmo disk k: ako je već na ciljanom tornju (imajte na umu da to nije nužno treći toranj, nego ovisi o tome gdje su veći diskovi) onda ga nije potrebno posebno micati, no ako nije, onda je potrebno riješiti sve diskove manje od njega (tu se zapravo pozivamo na rekurziju i ovo još trebamo izračunati preko manjih diskova), a zatim nam još treba 2^k poteza da sve ponovo prebacimo na ciljani toranj. Neka je $\mathbb{I}$ skup svih diskova koji nisu na ciljanom tornju. Tada je odgovor

$$\sum_{k\in\mathbb{I}} 2^k$$

Dakle, budući da idemo od većih prema manjim diskovima, možemo u $\mathcal{O}(1)$ odrediti je li na ciljanom tornju, a pametnom predobradom potencija od 2 možemo i potenciranje dobiti u $\mathcal{O}(1)$, pa nam samo treba jedna petlja (od najvećeg diska do najmanjeg) čime je konačna složenost $\mathcal{O}(n)$.