S1	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2023./24.

Dirichlet

Emanuel Tukač
21.10.2023.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

1. Uvod

Ako pet goluba ima četiri kuće kladio bih se u stan da dvije imaju istu adresu. Ili tako nekako.

Standardni zadaci

1. Na svadbi je n ljudi. Svaki par osoba se poznaje ili ne poznaje. Dokažite da barem dvije osobe imaju isti broj poznanstva unutar svadbe.

2. Koliko najviše skakaća možemo postaviti na šahovsku ploču tako da se međusobno ne napadaju?

3. Zadan je skup $\{1, 2, 3, ..., 2023\}$ i odabran je podskup S danog skupa. Za S vrijedi: Ne mogu dva člana trojke $(x, x + 5, x + 7)$ Istovremeno biti u skupu. Koliko je maksimalno $|S|$?

4. U prostoriji je 17 ljudi. Postoje 3 vrste odnosa koje mogu imati: ne poznaju se, samo su poznanici, prijatelji su (sve od navedenog je uzajamno). Dokažite da postoje 3 osobe koje su sve u istom odnosu.

Zadaci

5. Nogometaš kroz 360 dana 131 dan ide na trening. Dokažite da postoji niz od 30 uzastopnih dana u kojem je na trening išao točno 10 puta.

6. Zadan je skup $\{1, 2, 3, ..., 2023\}$ i odabran je podskup S danog skupa. Za S vrijedi: ako su x i y u S onda $x + y$ nije u skupu. Koliko je maksimalno $|S|$?

7. Zadan je skup $\{1, 2, 3, ..., 2023\}$ i odabran je podskup S danog skupa. Za S vrijedi: ako su x i y u S onda $\frac{x}{y}$ nije u skupu. Koliko je maksimalno $|S|$?

Egzotičniji zadaci

8. Dokaži da bilo koji 2001-člani podskup skupa $\{1, 2, 3, ..., 3000\}$ sadrži tri elementa od kojih su svaka dva međusobno relativno prosta.

9. Na natjecanju je bilo 30 strijelaca. Svaki natjecatelj gađa 16 puta metu koja je podijeljena na dva dijela, A i B. Ako pogodi u dio A natjecatelj dobiva 10 bodova, a ako pogodi u dio B dobiva 5 bodova. Na kraju natjecanja utvrdeno je da je broj pogodaka u dio B veći od polovine ukupnog broja odapetih strelica te da je ukupan broj promašaja jednak ukupnom broju pogodaka u dio A. Dokaži da su barem dva natjecatelja ostvarila isti broj bodova.

Egzotični zadaci

10. U državi postoji g gradova i c cesta, pri čemu svaka cesta povezuje točno dva različita grada, a između dva grada postoji najviše jedna cesta. Ceste su označene brojevima $1, 2, ..., c$. Tonći svoje putovanje mora proći tako da kad zapiše oznake cesta redom kojim ih je prolazio dobije strogo rastući niz brojeva. Dokaži da postoji grad takav da krenuvši iz toga grada Tonći može proći barem $\frac{2c}{g}$ cesta.

11. Neka je V konačan skup točaka u ravnini. Kažemo da je V *uravnotežen* ako za bilo koje različite A, B i P iz V postoji točka $C \in V$ takva da $|AC| = |BC|$. Kažemo da je V *bez središta* ako za bilokoje različite $A, B, C \in V$, ne postoji točka $P \in V$ takva da $|PA| = |PB| = |PC|$.
a) Dokažite da za sve $n \geq 3$ postoji uravnotežen skup od n točaka.
b) Za koje $n \geq 3$ postoji uravnotežen skup od n točaka bez središta?

2. Hintovi

Standardni zadaci

1. Ako svakoj osobi pridružimo broj poznanika i onda promatramo skup tih brojeva postoje neka dva broja koja se sigurno nemogu istovremeno pojaviti.

2. Skakač na crnom polju ne napada crna polja.

3. Stavimo 1 u S i ubacujemo sljedeći broj koji možemo. Dokažite da to daje maksimum.

4. Prvo dokažite da među 6 ljudi s dvije vrste odnosa postoji trojka u kojoj su svi u istom odnosu.

Zadaci

5. Dokažite da tvrdnja slijedi ako pokažemo da postoji 30 dana s ≥ 10 treninga i 30dana s ≤ 10 treninga.

6. Želimo nekako ograničiti broj "kategorija" za "predmete" . Fokusirajmo se na $min(S)$.

7. Prvo primjetimo da ako je $\frac{x}{y}, y \in S$ onda x nije u S. Pa se ponašamo ka da za $x, y \in S$ slijedi xy nije u S. Potom pokušavamo nešto kao u prethodnom zadatku.

Egzotičniji zadaci

8. Dirichlet će nam pomoći tako da kada bismo podijelili skup na neke uređene šestorke mogli bismo tvrditi da je barem iz jedne barem pet članova u podskupu.

9. Prije Dirichleta potrebno je par koraka algebre.

Egzotični zadaci

10. Ako želimo primjeniti Dirichleta da bi direktno dobili traženu tvrdnju morali bismo pokazati da je moguće za svaki grad odabrati neki put takve dužine da kada zbrojimo odabrane puteve za sve gradove dobijemo barem $2g$.

11. Možemo uparivati dužine $\overline{AB}$ i neku točku C takvu da $|AC| = |BC|$. A u b) zadatku imamo granicu na to koliko dužina smije biti pridruženo točki.

3. Rješenja

Standardni zadaci

1. Primjetimo da je broj poznanika za svaku osobu barem 0 (ne poznaje nikoga) i najviše $n-1$ (poznaje sve ostale). To nam daje n mogućih vrijednosti pa nam se čini da nemžemo primjeniti Dirichleta. Potrebno je primjetiti da nemogu istovremeno postojati osoba koja poznaje sve i osoba koja ne poznaje nikoga. Stoga je maksimalan broj različitih brojeva poznanika po osobama $n-1$ i sada možemo po dirichletu zaključiti da dvije osobe imaju isti broj poznanika.

2. Odgovor je 32. Postavimo skakače na sva crn polja i jasno je da se međusobno ne napadaju. Da bismo dokazali da nije moguće više promotrimo 2×4 ploču. Za svako crno polje na kojem je skakač postoji točno jedno bijelo koje napada. Recimo da su takva dva polja uparena. Jasn je da nesmijemo imati dva skakača u uparenim poljima jer se po definiciji napadaju. Sada popoločamo cijelu ploču manjim pločama i tako uparujemo polja ploče u 32 para. Sada kad bismo postavili više od 32 skakača na ploču sigurno bismo imali par s dva skakača.

3. Odgovor je 845.
   Koristimo konstrukciju: Stavimo 1 u S i ubacujemo svaki sljedeći broj koji možemo. Odnosno uzimamo brojeve koji pri dijeljenju s 12 daju ostatke $1, 2, 3, 4, 5$.
   Da bismo dokazali da ne možemo bolje od toga dovoljno je dokazati da ne možemo odabrati 6 broja među 12 uzastopnih. Promatrajmo 5 trojki unutar tih 12 brojeva:

$$(x, x+5, x+7)$$
$$(x+1, x+6, x+8)$$
$$(x+2, x+7, x+9)$$
$$(x+3, x+8, x+10)$$
$$(x+4, x+9, x+11)$$

   Nesmijemo odabrati dva broja iz iste trojke. A po dirichletu bi za više od 5 brojki morali odabrati barem dva broja iz barem jedne trojke.
   Sad možemo 2023 uzastopnih brojeva podijeliti na grupe od 12 (odnosno 7 u zadnjoj grupi) i u svakoj grupi može biti maksimalno 5 brojeva u S. To daje upravo onu granicu koja se poklapa s konstrukcijom.

4. Prvo dokažimo da među 6 ljudi s dvije vrste odnosa postoji trojka u kojoj su svi u istom odnosu.
   Odaberemo jednu od 6 osoba. Po dirichletu je u istom odnosu s barem 3 od 5 preostalih osoba. Nazovimo taj odnos odnos 1. Ako su među tih 3 osobe bilokoje dvije u odnosu 1 onda čine trojku s odabranom osobom. U suprotnome te tri osobe same čine trojku jer su sve međusobno u odnosu 2.
   Na sličan način dokažemo tvrdnju zadatka.
   Među 17 osoba odaberemo jednu. Po Dirichletu mora postojati barem 6 osoba među ostalih 16 s kojima je odabrana osoba u istom odnosu.Ako je neki par među njima u tom istom odnosu imamo traženi trojku, a u suprotnome se vraćamo u već dokazani slučaj za 2 odnosa i 6 ljudi.

Zadaci

5. Po dirichletu postoji 30 dana s ≥ 10 treninga i 30dana s ≤ 10 treninga. Promotrimo neka dva niza od 30 dana i promotrimo "put" od jednog intervala k drugom. Znači uzmemo prvi od ta dva intervala, onda se pomaknemo za jedan dan (ne gledamo niz koji počne s prvim danom prvog intervala već niz od 30 dana koji poćne drugim danom prvog intervala). Tako se pomićemo sve dok ne dođemo do drugog intervala. Svakim pomakom broj treninga u intervalu može se promjeniti za $1, 0, -1$. Pa s obzirom da smo krenuli iz intervala si ≤ 10 treninga i završili u ≥ 10 treninga (ili obrnuto) možemo biti sigurni da smo u međuvremenu barem jednom bili u intervalu s točno 10.

6. Primjetimo da možemo uzeti sve brojeve ≥ 1012 i biri sigurni da nemamo zbroj ≤ 2023. To nam daje $max(|S|) \geq 1012$ i želimo dokazati da ne može biti veći. Fokusiramo se na $min(S)$. Znamo da za brojeve veće od $2023 - min(S)$ ne postoji broj u S takav da im zbroj bude ponovo u S. Znamo da i brojevi manji od $min(S)$ nisu u S.
   Stoga možemo upariti svaki $i \in \{1, 2, ..., min(S)\}$ s $2023 - i$ i znamo da maksimalno jedan od njih može biti u S. Te parove ćemo zapisivati kao uređeni par $(2023 - i, i)$.
   S druge strane za sve i takve da $min(S) < i \leq 2023 - min(S)$ znamo da je samo jedan član uređenog para $(i, i + min(S))$ u S.
   Svaki broj se nalazi u barem jednom paru osim sam $min(S)$ koji nema para. Promotrimo sada skup svih parova kojima je prvi član u S. primjetimo kako su parovi toga skupa disjunktni i da ih ukupno ima $|S| - 1$.
   Sada pretpostavimo da je $|S| > 1012$ odnosno da je barem 1013. $min(S)$ je sigurno u S i preostaje barem 1012 dugih članova skupa S. Svaki od njih ima neki svoj uređeni par pa bi skup svih odabranih uređenih parova imao barem 2024 elementa. Počeli smo s 2023 mogućih brojeva pa po Dirichletu sad imamo dva ista što je kontradikcija jer smo imali disjunktne parove.

7. (Uz minimalne modifikacije) Županijsko 1A 2020. 5.

Egzotičniji zadaci

8. Državno 4A 2013. 5.

9. Državno 3A 2010. 5.

Egzotični zadaci

10. HMO 2012. Drugi dan. 2.

11. IMO SL 2015 C2