J3	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb,sezona 2023./24.

KAGH

Hrvoje Radoš

3.11.2023.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Youth is happy because it has the ability to see beauty. Anyone who keeps the ability to see beauty never grows old. - Franz Kafka

1. Uvod

Za početak, definirajmo neka svojstva te što su sredine.

Teorem 1.1: Svojstva uređaja realnih brojeva

1. $x \geq y$ i $x \leq y \implies x = y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $x \geq y$ i $y \geq z \implies x \geq z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. $x \geq y \implies x + z \geq y + z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
4. $x \geq y$ i $a \geq b \implies x + a \geq y + b, \quad \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$
5. $x \geq y$ i $z \geq 0 \implies xz \geq yz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
6. $x \geq 0$ i $y \geq 0 \implies xy \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $x \geq y$ i $a \geq b \implies xa \geq yb, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y, a, b \geq 0$
8. $x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0, x^2 = 0$ samo za $x = 0$
9. $x \geq y \implies \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ovo su dosta očite tvrdnje i zbog toga ih nitko ne uči napamet i ne bi ih ni vi trebali, ali ipak česti izvor "fake solvova" je korištenje tvrnje koja nije navedena gore. Naime, sve su tvrdnje očite, ali postoje tvrdnje koje se čine očitima, ali zapravo ne vrijede, stoga ću provesti malo vremena navodeći ih.

- Množenje obje strane brojem koji može biti negativan (izgleda da nema toliko puno stvari :p)

Definicija 1.2: Korisne formule

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
3. $(a \pm b)^3 = a^3 + 3ab^2 \pm 3a^2b \pm b^3$
4. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Definicija 1.3: Sredine za n brojeva

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ **pozitivni** realni brojevi. Tada definiramo

- aritmetička sredina
$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
- geometrijska sredina
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$
- harmonijska sredina
$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
- kvadratna sredina
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Teorem 1.4: KAGH nejednakost

Za gore definirane sredine vrijedi
$$K \geq A \geq G \geq H$$
Jednakost se postiže za $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Oprez 1

Ovo vrijedi samo za pozitivne realne... :)

Napomena 1.5

Najčešće se koristi nejednakost $A \geq G$, dok su ponekad korisne $K \geq A$ i $A \geq H$.

Napomena 1.6

Pokušajte se sada malo poigrati s ovim nejednakostima. Uzmite neku nejednakost algebarski ju izmanipulirajte i proučite ima li vam rezultat smisla. Možda se neki pitaju zašto bi ovo trebali napraviti? Uglavnom želim da dobijete osjećaj za svaku nejednakost i razvijete nekakvu intuiciju kada koju koristiti.

Primjer 1. Dokažite da za pozitivne realne brojeve vrijedi:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Vrijedi li ovo i za nepozitivne brojeve?

Primjer 2. Dokažite da za svaki pozitivan realan broj x vrijedi

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Lakši zadatci

1. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost

$$(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$$

2. Dokaži da za realne brojeve a i b vrijedi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$$

uz uvjet $a + b = 1$

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $abc = 1$. Dokažite nejednakost

$$ab + bc + ac \geq 3$$

4. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

6. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Umjereni zadatci

7. Dokaži da za realne x i y vrijedi:

$$xy \leq \frac{1}{4}$$

Uz uvjet da vrijedi $x + y = 1$

8. Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve x, y vrijedi:

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy$$

9. Dokažite da za pozitivne relane brojeve a, b, c vrijedi:

$$a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ca}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq 0$$

10. Neka su a, b nenegativni realni brojevi takvi da $a + b \leq 2$. Dokaži

$$\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} \leq \frac{2}{1 + ab}$$

11. Neka su a, b, b pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $abc = 1$. Dokažite

$$\frac{a - 1}{b + 1} + \frac{b - 1}{c + 1} + \frac{c - 1}{a + 1} \geq 0$$

Teži zadatci

12. **Nesbittova nejednakost** Dokažite da za sve pozivine realne brojeve vrijedi:

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$$

13. Ako su x, y, z, w realni brojevi za koje vrijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + x + 3y + 5z + 7w = 4$$

Odredite maksimalnu vrijednost izraza:

$$x + y + w + z$$

14. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $xyz = 1$. Dokaži nejednakost:

$$\frac{x^6 + 2}{x^3} + \frac{y^6 + 2}{y^3} + \frac{z^6 + 2}{z^3} \geq 3(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x})$$

15. Dokaži da za trokut sa stranicama a, b, c i površinom S vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

2. Hintovi

Lakši zadatci

1. A-H

2. A-H

3. A-G

4. A-G

5. A-G (u promatrajte parove)

6. A-G

Umjereni zadatci

7. A-G

8. A-G

9.

10. razmnožite izraz

11. razmnoži izraz

Teži zadatci

12. Direktno primijeni A-H na ... (a necu sada sve reci :))

13. sredite početni izraz da bude suma kvadrata

14. A-G

15. Heronova formula

3. Rješenja

Lakši zadatci

1. rješenje slijedi direktno iz A-H nejednakosti gdje je A aritmetička sredina od a i b

2. $$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

   Sređivanjem se dobije tvrdnja koju želimo

3. $$\frac{ab+bc+ac}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 1$$

   Sada jednostavno slijedi

4. $$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{a}} = 1$$

   Sada slijedi jednostavno tvrdnja zadatka

5. $$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$
   $$\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$$
   $$\frac{a^2+c^2}{2} \geq ac$$

   Kada sve to zbrojimo dobije se tražena nejednakost.

6. Zadatak rješavamo primjenom A-G nejednakosti na svaki od faktora. Po A-G nejednakosti vrijedi:

   $$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \qquad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$$
   $$\iff a+b \geq 2\sqrt{ab}, \qquad b+c \geq 2\sqrt{bc}, \qquad c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

   Kada pomnožimo sve 3 nejednakosti dobijemo traženi izraz

   $$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$$

   što je trebalo dokazati.

Umjereni zadatci

7. kvadriranjem $x + y = 1$ dobije se $x^2 + 2xy + y^2 = 1$ Sada po A-G vrijedi:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$$

$$x^2 + y^2 = \geq 2xy$$

$$1 - 2xy \geq 2xy$$

$$xy \leq \frac{1}{4}$$

8. županijsko 2009. 1. razred A kategorija

9. link 11. predavanje 9. zadatak

10. županijsko 2019. 2. razred A razina

11. link 11. predavanje 10. zadatak

Teži zadatci

12. link

13. Državno 2017. 2. razz A kategorija

14. Državno 2016. 3. razred A kategorija

15. link