S5	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2023./24.

Mix

Krunoslav Ivanović
18. studenog 2023.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

Zadaci

1. Neka su P i Q normirani polinomi s realnim koeficijentima oba stupnja 10. Ako jednadžba $P(x) = Q(x)$ nema realnih rješenja, dokažite da onda jednadžba $P(x+1) = Q(x-1)$ mora imati realno rješenje.

2. Neka je $P(x) = 4x^2 + 12x - 3015$. Definirajmo niz polinoma P_n kao $P_1(x) = \frac{P(x)}{2016}$ te $P_{n+1}(x) = \frac{P(P_n(x))}{2016}$, za sve $n \geq 1$.

a) Dokažite da postoji realan broj r takav da je $P_n(r) < 0$ za sve prirodne brojeve n.

b) Koliko ima cijelih brojeva m takvih da je $P_n(m) < 0$, za beskonačno mnogo n?

3. Ako odaberemo $n+1$ brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, onda postoje dva takva da jedan dijeli drugog.

4. Dokažite da bilo koji niz od n^2 različitih brojeva sadrži podniz duljine n koji je monoton (ili strogo rastući, ili strogo padajući).

5. Neka su E i F nožišta visina iz vrhova B i C u trokutu $\triangle ABC$ i neka je H njegov ortocentar. Neka je točka T presjek pravaca EF i BC, a neka je M polovište stranice BC. Dokažite da je pravac TH okomit na pravac AM.

6. Neka je $ABCD$ jednakokračni trapez u kojem je $AB \parallel CD$. Upisana kružnica ω trokuta $\triangle BCD$ dira $\overline{CD}$ u točki E. Neka je F točka na simetrali kuta $\angle DAC$ takva da je $EF \perp CD$. Neka kružnica opisana trokutu $\triangle ACF$ siječe pravac CD u točkama C i G. Dokaži da je trokut $\triangle AFG$ jednakokračan.

7. a) Dokažite da za svaki prirodni broj n postoje različiti prirodni brojevi x i y takvi da $x + j$ dijeli $y + j$ za sve $j = 1, 2, \ldots, n$.

b) Pretpostavite da su x i y prirodni brojevi takvi da $x + j$ dijeli $y + j$ za sve prirodne brojeve j. Dokažite da je onda $x = y$.

8. Dokažite da za svaki prirodni broj $n \geq 2$ postoji skup $\mathcal{S}$ koji se sastoji od n cijelih brojeva takvih da $(a-b)^2$ dijeli ab za sve različite $a, b \in \mathcal{S}$.

Hintovi

1. Razmislite o stupnju polinoma.

2. Preko algebarskih manipulacija, probajte doći do neke ljepše forme za P_{n+1}.

3. Želimo primijeniti Dirichletov princip. Cilj je napraviti n skupina, unutar kojih će za svaka dva broja vrijediti da jedan dijeli drugog.

4. Želimo primijeniti Dirichletov princip. Probajte sa svakim elementom asocirati neki rastući i padajući podniz.

5. Prepoznajte konfiguraciju s ortocentrom!

6. Prepoznajte konfiguraciju s pripisanom kružnicom!

7. Da bi $x + j$ dijelilo $y + j$, nužno i dovoljno je da $x + j$ dijeli $x - y$.

8. Pokušajte induktivno konstruirati skup.

Rješenja

1. Sverusko 2013.

2. Brazil 2016.

3. Uzmemo n neparnih brojeva iz $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ i za neparan broj a gledamo podskup $\{a, 2a, 4a, 8a, \ldots\}$. Očito je da na dani način particioniramo $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ na n disjunktnih podskupova. Štoviše, odabirom $n+1$ elementa, nužno moramo imati dva elementa iz istog skupa, čime smo automatski gotovi, jer je jasno da za bilo koja dva elementa iz istog skupa vrijedi da prvi dijeli drugi.

4. Erdos-Szekeres teorem.

   Ideja je da svakom članu niza pridružimo najdulji padajući/rastući podniz koji završava s njim. Jasno je da će različitim elementima niza biti pridruženi različiti parovi (pretpostavimo suprotno, odnosno, neka su x_i i x_j elementi iz niza koji imaju iste pridružene vrijednosti. No, ako je $x_i < x_j$, možemo pridružiti dulji rastući niz članu x_j. Analogno, ako je $x_i > x_j$, možemo pridružiti veći padajući niz članu x_j).

   Sada, ako su svi monotoni podnizovi duljine najviše $n - 1$, naši uređeni parovi mogu poprimiti samo $(n - 1)^2$ vrijednosti, no ukupno imamo n^2 uređenih parova.

5. Iz konfiguracije s ortocentrom, znamo da je MH okomito na AT. Sada, u trokutu AMT, AH i MH su visine pa je H ortocentar tog trokuta, odnosno, TH je također visina, to jest, TH je okomito na AM.

6. USAMO 1999.

7. Kao u hintu, uočimo da $x + j$ mora dijeliti $y - x$ za $j = 1, 2, \ldots, n$. Zato je dovoljno osigurati da je $y-x$ djeljiv s $(x+1)\cdots(x+n)$, a to možemo tako da uzmemo $y = x+(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$.

   Za drugi dio zadatka, istim argumentom vidimo da $y - x$ mora biti djeljiv s $x + j$ za sve prirodne brojeve j. Naravno, to znači da je $y - x = 0$ (nula je jedini broj s beskonačno mnogo djeljitelja).

8. USAMO 1998.