J8	juniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2023./24.

Bojanja i popločavanja

Vedran Cifrek

9.12.2023.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Uvod

Ako se u zadatku traži popločavanje ploče s nekim tipom pločica onda se podrazumijeva da ako pločica dira ćeliju ploče onda ju dira samo u rubovima ili ju cijelu prekriva. Također, niti jedan dio pločice ne smije se nalaziti izvan ploče, te se različite pločice ne smiju sječi (smiju se dirati). Pločice smijemo rotirati ako drugačije nije navedeno u zadatku.
Ako želimo dokazati da je popločavanje moguće onda moramo nacrtati eksplicitan primjer ili pronaći neki uzorak od manje pločica i objasniti kako će se on ponašati na cijeloj ploči.
Ako želimo dokazati da neko popločavanje s određenim pločicama nije moguće najčećšće koristimo tehniku bojanja:
Izaberemo neki broj boja (najbolje ih je označavati brojevima) i svakom od polja ploče pridružimo neku boju na pametan način. Onda za zadane pločice pogledamo koje su sve mogućnosti za to koliko pločica koje boje prekriva, najjednostavniji primjer je kad svaka pločica istog tipa prekriva isti broj boje nekog tipa neovisno o tome gdje ju stavimo.
Da bismo dokazali da bojanje ne postoji izračunamo koliko bi pločica trebalo biti (ako postoji sam jedan tip) ili postavimo sustav jednadžbi za broj pločica od pojedinih vrsta : jedna od jednadžbi je uvijek da broj polja koja prekrivaju je jednak ukupnom broju polja na ploči, a ostale dobijemo od toga da brojimo koliko ima polja određene boje (ako isti tip pločice ima više kombinacija za boje koje može poprimiti nam treba posebna nepoznanica za svaku mogućnost).

Tehnika bojanja može biti korisna i u zadacima u kojima ne tražimo popločavanje. Tamo obično gledamo kako se broj ćelija neke boje mijenja u ovisnosti o operacijama koje su zadane.

Osim zadataka s popločavanjem u ovom predavanju se pojavljuju zadatci na ploči gdje se u tekstu zadatka pojavljuje bojanje ploče. I u tim zadatcima nekad trebamo napraviti neko svoje drugo bojanje ploče. Dodatno, u nekima od zadataka će biti bitan bojam invarijante.
Invarijanta je svojstvo nekog procesa koje se ne mijenja u niti jednom koraku, npr. radimo neke operacije na ploči, ali broj polja koja smo označila kao da su crne boje (boje 1) se ne mijenja.
Takva svojstva nam omogućuju da dokažemo da primjenom zadanih operacija nije moguće doći iz nekog stanja u neko drugo stanje tako da dokažemo da imamo svojstvo koje se ne mijenja u koracima, ali to svojstvo je različito za početno i završno stanje. Npr. ako se broj crnih polja ne mijenja, onda ne postoji niz koraka tako da dođemo iz stanja s 5 crnih u stanje s 10 crnih.

Zadaci

1. Možemo li popločati 8×8 kvadratnu ploču kojoj nedostaju nasuprotni kutevi (dvije 1×1 ćelije) s 2×1 pločicama tako da svaka pločica prekriva točno 2 polja ploče i pločice se ne preklapaju?

2. Možemo li popločati 10×10 kvadratnu ploču s 1×4 pločicama?

3. Neka je zadana 8×8 ploča koja je šahovski pobojana (sva polja su crna ili bijela, polja ploče koja dijele cijelu stranicu su različite boje). U svakom koraku smijemo odabrati jedan redak ili stupac, te u njemu sva crna polja pretvorimo u bijela, a sva bijela pretvorimo u crna. Je li moguće u konačno koraka postići da je točno jedno polje crno, a ostala bijela.

4. Pronađite sva polja 8×8 ploče takva da vrijedi: ako to polje prekrijemo s 1×1 pločicom, ostatak ploče možemo popločati 1×3 pločicama.

5. Dokažite da ako ploči 1024×1024 uklonimo bilo koje polje ju je moguće popločati s L-trominama (pločica s 3 polja u obliku slova L).

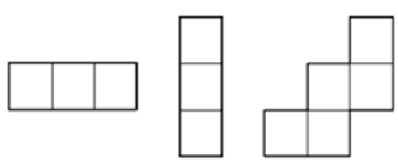
6. Na po volji velikoj kvadratnoj ploči postavljeno je 9 žetona u polja kvadrata 3×3, po jedan u svako polje. U svakom koraku možemo s jednim žetonom skočiti u horizontalnom ili vertikalnom smjeru preko jednog zauzetog polja na slobodno polje i pritom žeton koji je preskočen uklanjamo. Možemo li postići da nakon konačno koraka ostane samo jedan žeton na ploči?

7. Neka je n prirodan broj, Ana i Bob igraju igru na 8×8 ploči. Prvo, Ana izabere n polja i oboja ih u crveno (ostala polja su bijela). Bob bira 4 retka i 4 stupca te sva polja koja se nalazi u njima boja u crno. Ana pobjeđuje ako na ploči ostane barem jedno crveno polje, a u suprotnom pobjeđuje Bob. Odredi najmanji prirodan broj n za koji Ana može pobijediti neovisno o tome kako igra Bob.

8. Odredi sve prirodne brojeve n za koju je moguće 9×7 ploču popločati s točno n 2×2 kvadratnih pločica te proizvoljno mnogo L-tromina.

9. Na 5×100 ploči je n polja obojano crno(ostala su bijela), tako da za svako polje (crno ili bijelo) vrijedi da ima najviše 2 susjedna(susjedna su ona polja koja dijele stranicu) crna polja. Odredi najveći n za koji to može vrijediti.

10. Je li moguće ploču dimenzija 1000×1000 prekriti koristeći isključivo likove prikazane na slikama:



Likove nije dozvoljeno rotirati niti zrcaliti.

11. Ana i Bob igraju igru na 6×6 ploči. Ana igra prva i onda dalje naizmjence rade poteze. U svakom potezu osoba izabere racionalan broj koji se do sad nije na ploči i napiše ga na netko od mjesta na ploči gdje ne piše broj. Igra završava kada su sva polja puna i onda se u svakom retku najveći broj oboji u crno. Ana pobjeđuje ako tih 6 crnih polja čini put - za svaki redak crno polje u tom retku mora biti povezano s poljem u sljedećem retku (ako takvo postoji). Dva polja su povezana ako dijele barem jednu točku. Ako ne pobijedi Ana, onda pobijedi Bob. Odredi tko ima pobjedničku strategiju ako obje osobe igraju optimalno.

12. Ana i Bob igraju igru na 5×5 ploči. Prvi potez radi Ana, a onda dalje rade poteze naizmjence. Ana u svakom svojem potezu izabere prazno polje na ploči i upiše 1. Bob izabere prazno polje i upiše 0. Na kraju igre se pogleda zbroj brojeva u svakom 3×3 kvadratu na ploči i uzme se maksimum te ana dobije toliko bodova. Koji je najveći mogući prirodan broj n takav da Ana može postići da dobije barem n bodova, neovisno o tome kako Bob igra.

13. A i B igraju igru na 1×2000 ploči. Prvi potez radi A, pa dalje naizmjence. U svakom potezu igrač izabere jedno prazno polje i upiše u njega S ili O. Pobjeđuje prvi igrač koji može napraviti potez takav da nakon njega na ploči piše SOS u uzastopnim poljima. Ako nitko to ne uspije igra završava nerješeno. Dokaži da B ima pobjedničku strategiju.

Hintovi

1. Pobojamo ploču šahovski (dvije boje, polja koja dijele stranicu su različite boje)

2. Bojimo "šahovski" u 4 boje, tj tako da mjenjamo boje 1, 2, 3, 4 redom po dijagonalama.

3. Promotrimo kako se mijenja broj crnih polja nakon svakog koraka.

4. Trebaju nam dva slična bojanja da vidimo koje pločice smijemo maknuti

5. Želimo matematičkom indukcijom dokazati tvrdnju za svaki prirodan broj n ploču dimenzija $2^n \times 2^n$ kojoj nedostaje jedno polje možemo popločati L-trominama.

6. Bojimo ploču u 3 boje.

7. Prvo dokažite za koje brojeve Bob pobjeđuje, pa iz dokaza probajte napraviti konstrukciju gdje ne može pobijediti takvih algoritmom.

   Za konsturkciju hint: ispada da je dobro imati polja koja su sama u svojem retku ili stupcu, koliko god ih je moguće tako imat da ostatak konstrukcije bude u skladu s dokazom da za manje brojeve Bob pobjeđuje.

8. Želimo napraviti neko pametno bojanje tako da svi kvadrati pokrivaju isti broj polja iste boje i onda sustavom jednadžbi opisati kako se ponašaju L-tromine na tom bojanju (nepoznanice označavaju broj L-tromina koje pokrivaju točno određen broj polja određenih boja, npr. kad bi šahovski obojali ploču onda bi postojala dva tipa L-tromina jedna koji pokriva dva crna polja i jedno bijelo i drugi koji pokriva dva bijela i jedno crno)

9. Želimo dvostruko prebrojati broj uređenih parova (bilo kakvo polje(crno ili bijelo), crno polje koje je susjedno prvom polju)

10.

11. B igrač može pobijediti, cilj mu je da nekako svojim potezima odredi kako mogu izgledati obojena polja na kraju.

12.

13.

Rješenja

1.

1		1		1		1	
	1		1		1		1
1		1		1		1	
	1		1		1		1
1		1		1		1	
	1		1		1		1
1		1		1		1	
	1		1		1		1

Kada ploču obojimo šahovski(kao na slici) onda ona ima 32 polja jedne boje i 32 polja druge boje. Kad maknemo dva nasuprotna kuta maknemo 2 polja boje 1, pa ostane 30 polja te boje.

Pretpostavimo da imamo popločavanje takve ploče. Svaka 1×2 pločica koju postavimo na takvu ploču pokriva točno jedno polje boje 1, pa ako ima 30 polja boje 1 onda ima i maksimalno 30 pločica na ploči, no ukupno imamo $8 \cdot 8 - 2 = 62$ polja za prekriti pa nam za to treba $62/2$ pločica s 2 polja, tj. 31 pločica. Kontradikcija, znači popločavanje nije moguće.

2.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Obojimo ploču kao na slici. Vidimo da svaka 1×4 pločica pokriva točno jedno od polja svake boje. Za popločati cijelu ploču nam treba 100/4=25 pločica, no na ploči ima npr. 26 polja boje 2, pa ih ne može pokriti 25 pločica kad svaka pokriva točno jedno polje te boje.

3. Dokazat ćemo da je broj crnih polja na ploči uvijek paran. Na početku ih ima 32 pa to je parno, sad pretpostavimo nakon nekoliko koraka imamo paran broj crnih polja i pogledamo što se dogodi nakon jednog koraka:

Recimo da ima $2n$ crnih polja gdje je n prirodan broj ili 0. Biramo neki redak ili stupac i nad njim radimo operaciju. Neka taj redak(stupac) ima točno k crnih polja u sebi. To znači da taj redak(stupac) ima $8-k$ bijelih polja. Ostatak ploče osim tog retka se ne mijenja, i tamo ima $2n-k$ crnih polja. Nakon što zamijenimo boje u tom retku, on sadrži k bijelih polja i $8-k$ crnih polja. Ukupan broj crnih polja na ploči je onda $(2n-k)+(8-k) = 2n+8-2k = 2(n+4-k)$, tj. dobili smo paran broj.

Znači na početku imamo paran broj crnih polja, i nakon svake operacije ako je broj bio paran prije operacije je paran i nakon, onda znamo da je u svakom trenutku paran broj crnih polja na ploči.

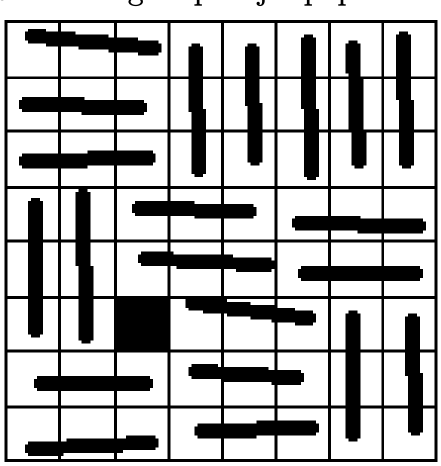
To znači da ne možemo doći to pozicije gdje je točno 1 crno jer je to neparan broj.

4. Napravit ćemo dva bojanja u 3 boje gdje su sve dijagonale koje su paralelni s jednom velikom dijagonalom iste boje, i te boje se periodično mijenjaju. Dvije velike dijagonale su one koje spajaju nasuprotne kuteve cijele ploče.

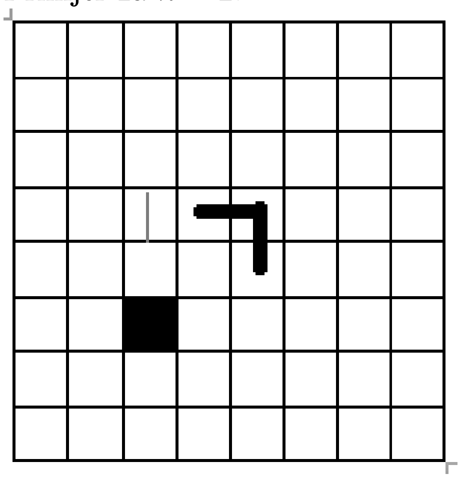
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2
1	3	2	1	3	2	1	3
2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2
1	3	2	1	3	2	1	3
2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2

1×3 pločice trebaju prekriti 63 polja ploče, znači bit će ih 21.
U oba bojanja svaka 1×3 pločica pokriva točno jedno polje svake boje.
Pogledajmo prvo prvo bojanje, vidimo da se u njemu pojavljuje 22 polja boje 2. Kako s 1×3 pločicama možemo pokriti samo 21 polje boje 2, znači da 1×1 pločica mora biti na nekom polju koje je tu obojano s 2.
Sada pogledamo drugo bojanje, u njemu zapravo isto ima 22 polja koja su tamo označena bojom 2, pa 1×1 pločica mora biti na jednom od njih.
Znači jedine moguća mjesta gdje može biti 1×1 pločica su ona koja su u oba bojanja označena s bojom 2, a postoje samo 4 takva i dobivena su rotacijom jedna iz drugih, tako da je dovoljno nacrtani primjer popločavanja za samo jedno od njih.
Jedan mogući primjer popločavanja:



5. Želimo matematičkom indukcijom dokazati tvrdnju za svaki prirodan broj n ploču dimenzija $2^n \times 2^n$ kojoj nedostaje jedno polje možemo popločati L-trominama.
Baza za $n = 1$: imamo 2×2 ploču kojoj nedostaje jedno polje i očito ju možemo popločati s jednom L-trominom.
Pretpostavka: Svaku moguću ploču dimenzija $2^n \times 2^n$ kojoj nedostaje jedno polje možemo popločati s L-trominama.
Korak: Pretpostavimo da imamo proizvoljnu $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ploču kojoj nedostaje jedno polje. Tu ploču možemo podijeliti na 4 $2^n \times 2^n$ ploče. Polje koje nedostaje se nalazi u jednoj od te 4, i onda tu u kojoj nedostaje polje možemo po pretpostavci indukcije popločati. Da bi primijenili pretpostavku indukcije na ostale 3 ploče treba nam da od svake nedostaje točno jedno polje, to možemo postići tako da u sredini velike ploče stavimo jednu L-trominu koja će prekrivati točno jedno polje od svake od ove 3.
Primjer za $n = 2$:



6. Napravimo bojanje ploče isto kao jedno od bojanja u 4. zadatku, samo ga proširimo u svim smjerovima. Onda početnih 9 polja gdje se nalaze žetoni izgledaju:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Tj. broj žetona svake boje je 3.
Sada promotrimo što se dogodi kad radimo jedan skok s žetonom, mijenja se stanje na 3 uzastopna polja na ploči, tj. na 3 polja različite boje. Ukupan broj žetona na dvjema poljima se smanji za jedan, a na onoj trećoj se poveća za jedan. Na početku su brojevi koliko ima žetona na kojoj boji svi neparni, i vidimo da nakon svakog koraka se mijenja parnost svih njih, tj uvijek su svi ili parni ili neparni. Znači nije moguće doći do stanja gdje je jedan žeton na ploči jer onda jedna boja ima 1 žeton, a ostale 2 boje po 0, pa su dvije parne, a jedna neparna.

7. JBMO SL 2018

8. JBMO 2010

9. JBMO 2019

10. HMO 2019 MEMO test-2.zadatak

11. Označimo neka polja ploča na sljedeći način:

M	M	M			
M	M	M			
M	M			M	
			M	M	M
			M	M	M
			M	M	M

Ako Bob može postići da na kraju igre se obojena polja nalaze samo među tim poljima onda sigurno ne postoji traženi put i on će pobijediti. Strategija koja će Bobu omogućiti da se maksimum u svakom retku nalazi na jednom od tih polja je:
Bilo kako u svakom retku napravi 3 para polja, tako da je jedno od polja u paru označeno s M, a drugo nije označeno s M. Svaki put kad Ana napiše broj u polje koje nije označeno s M, Bob u polje koje je njemu upareno napiše veći broj od njezinog broja, a svaki put kad Ana napiše broj u polje označeno s M, Bob napiše manji broj u polje koje je njemu upareno. Kada je igra gotova svako polje koje nije označeno ima polje u svojem paru koje ima veći broj od njega, pa je u svakom retku sigurno maksimum na polju označenom s M i Bob pobjeđuje.

12. IMO SL 1994 C1

13. USAMO 1999 Problem 5. Drugačije rješenje iz knjige Olympiad Combinatorics, Pranav A. Sriram:

Example 7 [USAMO 1999-5]
The *Y2K Game* is played on a 1×2000 grid as follows. Two players in turn write either an S or an O in an empty square. The first player who produces three consecutive boxes that spell SOS wins. If all boxes are filled without producing SOS then the game is a draw. Prove that the second player has a winning strategy.

Answer:
Call an empty square *bad* if playing in that square will let the other player form SOS in the next turn. We claim that an empty square is bad **if and only if** it is in a block of 4 squares of the form S_ _ S.

It is easy to see that both these empty squares are bad, as playing either S or O will allow the other player to form SOS. Conversely, if a square is bad, then playing an O in it will allow the other player to win, so it must have an S next to it and an empty square on the other side. Also, playing an S in a bad square allows the other player to win, so there must be another S beyond the empty square. This forces the configuration to be S_ _S, proving our claim.

Now after **A**'s first move, **B** writes an S at least 4 squares away from either end of the grid and **A**'s first move. On **B**'s second move, he writes S three squares away from his first S so that the two squares in between are empty. These two squares are bad. Note that at any point in the game there will always be an even number of bad squares (since they come in pairs, by our claim above). So whenever it is **B**'s turn, an odd number of moves would have been made, so an odd number of squares would be empty, of which an even number would be bad. Hence there will always be at least one square that is not bad on **B**'s turn, so **B** won't lose. Eventually the game will end since there are at least 2 bad squares, so **B** must win. ■