Sve, samo ne komba

Stella Čolo

20.01.2024.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

Zadaci

1. Riješi sustav jednadžbi za nenegativne realne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$x_k + x_{k+1} = x_{k+2}^2 \ , \ \ (k = 1, 2, ..., n),$$

$(x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2)$

2. Nađi sve polinome $P(x)$ s realnim koeficijentima tako da za svaki realan broj x vrijedi

$$P(x^2 - 1) = P(x - 1)^2$$

3. U konveksnom četverokutu dijagonale AC i BD sijeku se u točki M. Vrijedi $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$. Točka K je presjek polupravca BA i simetrale $\angle ACD$. Dokaži da $\angle BKC = \angle CDB$.

4. U $\triangle ABC$ upisana kružnica dira stranice AB, BC, CA redom u točkama D, E, F. Točka X leži na pravcu EF tako da $\angle XBC = \angle XCB = 45°$. Točka M je polovište luka BC od kružnice opisane $\triangle ABC$ koji ne sadrži točku A. Dokaži da pravac MD prolazi kroz točku E ili kroz točku F.

5. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) takve da:

$$(x + y)^2 + 3x + y + 1 = z^2$$

6. Dokaži da jednadžba

$$4xy - x - y = z^2$$

nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

1. Hintovi

1. Promatraj najveći x_i.

2. Promatraj polinom $Q(x) = P(x-1)$

3. Svedi uvjet koji treba dokazati na ekvivalentan uvjet bez točke K.

4. Neka je točka P presjek BI i EF, poznata lema je da $\angle BPC = 90$

5. Smještanje između kvadrata

6. Faktorizacija i $x^2 + 1$ nema prosti faktor oblika $p = 4k + 3$

2. Rješenja

1. https://artofproblemsolving.com/community/c6h2936566p26279281

2. Promatramo polinom $Q(x) = P(x-1)$, uvjet postaje

$$Q(x^2) = Q(x)^2$$

za svaki realan broj x. Ako je polinom konstantan $Q(x) = c \Leftrightarrow c = c^2 \Leftrightarrow c = 1$ ili $c = 0$. Inače, $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, znamo da a_n nije jednak 0, pretpostavimo da postoji još bar jedan a_k koji nije 0 i odaberemo najveći takav k.

$$Q(x^2) = Q(x)^2 \Leftrightarrow a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} ... + a_2x^4 + a_1x^2 + a_0 = (a_nx^n + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0)^2$$
$$\Leftrightarrow a_nx^{2n} + a_kx^{2k} + a_{k-1}x^{2k-2} + ... + a_1x^2 + a_0 = (a_nx^n + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0)^2$$

Ovo je jednakost dva polinoma pa znamo da se postiže samo kada su svi koeficijenti uz odgovarajuće izraze na obje strane isti, promatramo koeficijent uz x^{n+k}. U slučaju da je $n+k$ neparan, ne pojavljuje se na lijevoj strani, a na desnoj strani je koeficijent uz x^{n+k} zapravo $2a_na_k \implies 2a_na_k = 0$, a to je u kontradikciji s odabirom k. U slučaju da je $n+k$ paran $k < \frac{n+k}{2} < n \implies a_{\frac{n+k}{2}} = 0 \implies$ koeficijent na lijevoj strani je opet 0. A na desnoj strani je $2a_na_k + a^2_{\frac{n+k}{2}} = 2a_na_k \implies 0 = 2a_na_k$ i opet dolazimo do kontradikcije pa zaključujemo da ne postoji nijedan nenegativan a_i osim a_n, odnosno $Q(x) = a_nx^n \implies a_nx^{2n} = a_n^2x^{2n} \Leftrightarrow a_n = 1 \Leftrightarrow Q(x) = x^n$.

$$P(x) = Q(x+1)$$

U slučaju kada je Q konstantan dobivamo dva rješenja za $P(x)$, $P(x) = 0$ i $P(x) = 1$, a u drugom slučaju dobivamo $P(x) = (x+1)^n$

3. https://artofproblemsolving.com/community/c6h228384p1265388

4. https://artofproblemsolving.com/community/c6h3069479p27703480

5.

$$(x+y+2)^2 > (x+y)^2 + 3x + y + 1 > (x+y)^2$$
$$\implies (x+y+2)^2 > z^2 > (x+y)^2 \implies z^2 = (x+y+1)^2$$

Uvrstimo to u početnu jednadžbu i dobijemo

$$(x+y)^2 + 3x + y + 1 = (x+y+1)^2 \Leftrightarrow x = y$$

pa su rješenja $(x, y, z) = (x, x, 2x+1)$, za svaki prirodan broj x.

6. Pretpostavimo da postoji rješenje.

$$4xy - x - y = z^2$$
$$\Leftrightarrow 16xy - 4x - 4y = 4z^2$$
$$\Leftrightarrow (4x-1)(4y-1) = (2z)^2 + 1$$

Poznata lema je da broj oblika n^2+1 nema prostih djelitelja oblika $4k+3$, a postoji $p = 4k+3$ koji dijeli $(4x-1) \Leftrightarrow p|(2z)^2+1 \implies$ nema rješenja.