S4	seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2023./24.

Konfiguracije

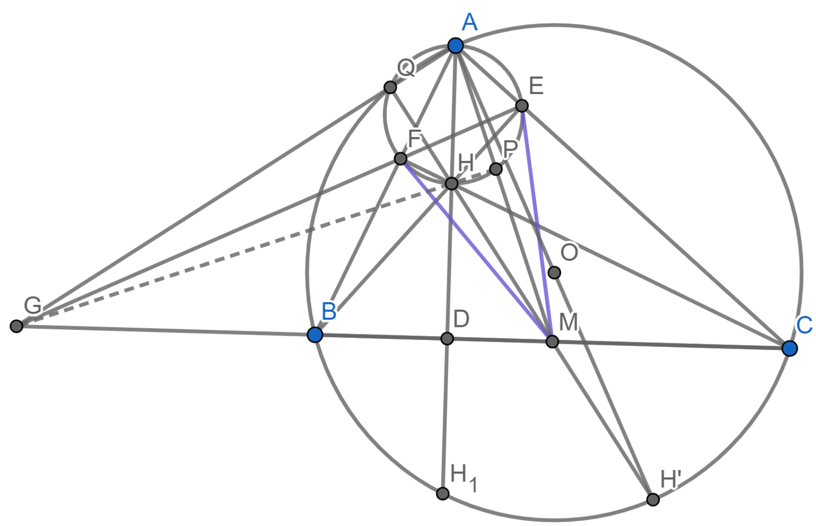
Stella Čolo

11.11.2023.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

1. Ortocentar

U $\triangle ABC$ točke D, E, F su redom nožišta visina iz vrhova A, B, C.
H-ortocentar
O-središte opisane kružnice.
N, K-dirališta upisane kružnice (ABC) sa stranicama AC, AB
M-polovište stranice AB
Q-presjek polupravca MH i (ABC)
Ovo je jedna od temeljnih konfiguracija u kojoj vrijede sljedeća svojstva:

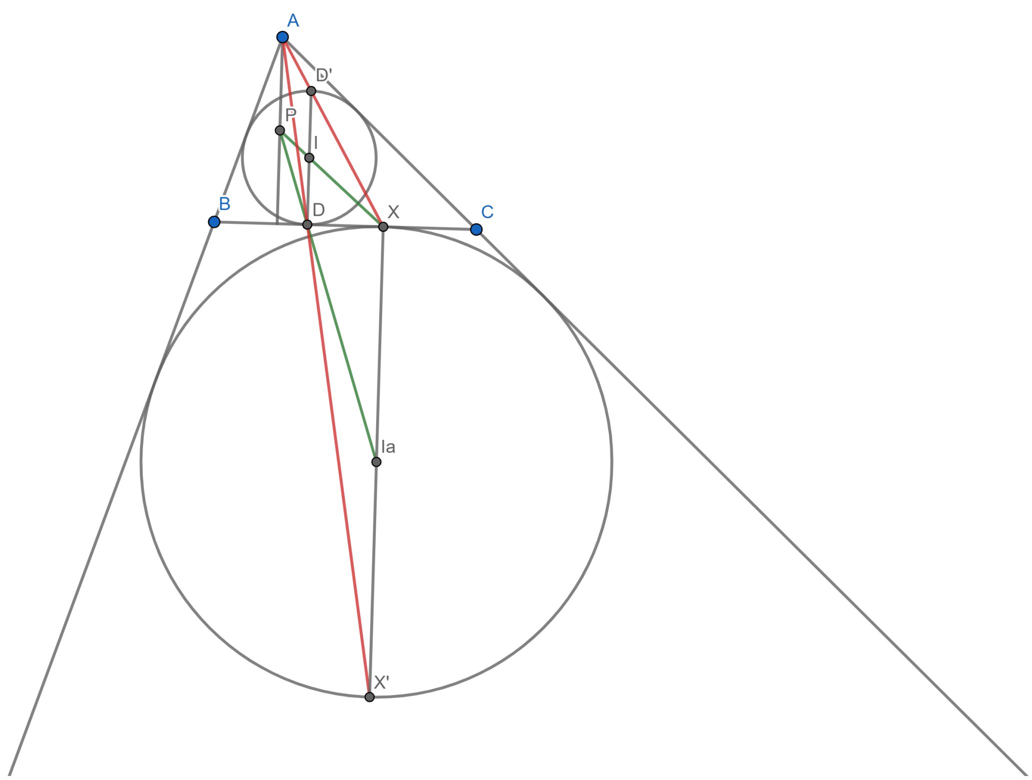


1. Preslike od H preko D, E, F leže na (ABC).

2. Neka je H' preslika od H preko M, H' leži na (ABC) i A, O, H' su kolinearne.
3. Dokaži da polovišta stranica, nožišta visina i polovišta dužina AH, BH, CH leže na kružnici. (Feuerbachova kružnica).
4. EM, FM su tangente na opisanu kružnicu $\triangle AEF$.
5. Q leži na (AEF)
6. Pravci BC, EF, AQ se sijeku u jednoj točki, nazovimo ju G.
7. HG je okomito na AM.

2. Upisana i pripisana kružnica

D, X- redom dirališta upisane i A-pripisane kružnice s BC
P- polovište visine iz vrha A
D'-presjek upisane kružnice i pravca ID
X'- presjek A-pripisane kružnice i pravca XI_A
Vrijedi sljedeće:



8. $|BD| = |XC|$
9. Točke A, D' i X su kolinearne.
10. Točke A, D i X' su kolinearne.
11. Neka je M polovište stranice BC, $IM \parallel AD'$
12. Točke P, I i X su kolinearne.
13. Točke P, D i I_A su kolinearne.

3. Teži zadaci

14. Dan je šiljastokutan $\triangle ABC$ s opisanom kružnicom ω i ortocentrom H. Neka je K točka na ω takva da se A i K nalaze s različitih strana pravca BC. Točke L i M su redom osnosimetrične točki K preko AB i BC. Točka E je drugi presjek ω s kružnicom opisanom $\triangle BLM$. Dokaži da se pravci KH, EM, BC sijeku u jednoj točki.

15. U šiljastokutnom $\triangle ABC$ u kojem $AB \neq AC$ točke H, G su ortocentar i težište. Presjek pravca AG s kružnicom opisanom tom trokutu je točka P. Neka je P' točka osnosimetrična točci P u odnosu na BC. Dokaži da $\angle CAB = 60$ ako i samo ako $HG = GP'$.

16. Dan je raznostraničan $\triangle ABC$ kojem je najdulja stranica AB. Neka su O, R središte i polumjer njemu opisane kružnice. AH_A, BH_B, CH_C su visine tog trokuta. Neka su točke D, E, F osnosimetrične točkama H_A, H_B u odnosu na H_BH_C, H_AH_C. Točka P je presjek AD i BE, a H je ortocentar $\triangle ABC$. Dokaži da je umnožak $OP \cdot OH$ konstantan i izrazi ga preko R.

17. U šiljastokutnom $\triangle ABC$ vrijedi $|AB| > |BC|$, a točke A_1 i C_1 su redom nožišta visina iz vrhova A i C. Neka je D drugo sjecište kružnica opisanih trokutima ABC i A_1BC_1. Neka je Z sjecište tangenata na opisanu kružnicu $\triangle ABC$ u točkama A i C, te neka se pravci ZA i A_1C_1 sijeku u točki X, a pravci ZC i A_1C_1 u točki Y . Dokaži da točka D leži na kružnici opisanoj $\triangle XYZ$.

18. Neka je ω opisana kružnica $\triangle ABC$. Točka P nalazi se unutar trokuta. A_1, B_1, C_1 su presjeci AP, BP, CP s ω. A_2, B_2, C_2 su redom točke centralnosimetrične točkama A_1, B_1, C_1 preko polovišta stranica BC, CA, AB. Dokaži da ortocentar $\triangle ABC$ leži na kružnici opisanoj $\triangle A_2B_2C_2$.

4. Hintovi

1. Neka je H_1 slika H preko BC, dokaži $\angle BAH_1 = \angle BCH_1$.

2. Sukladnost trokuta.

3. Homotetija.

4. Kut između tetive i tangente.

5. 2. zadatak.

6. Razmišljaj radikalno.

7. Promatrajmo presjek kružnice promjera AH s kružnicom opisanom $\triangle HBC$.

8. Promatrajmo stranice trokuta kao odsječke tangenti na upisanu i pripisanu kružnicu.

9. Uvedimo B', C' kao presjeke tangente na opisanu kružnicu $\triangle ABC$ u točci D' sa stranicama AC, AB. Sada promatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle AB'C'$.

10. Slično kao prošli zadatak, trebamo docrtati nešto da nađemo homotetiju iz A koja šalje točku D u točku X'.

11. Polovišta.

12. Nađimo homotetiju iz X između dva trokuta na čijim se paralelnim stranicama nalaze točke I i P.

13. Slično kao prošli zadatak.

5. Rješenja

1. Neka je H_1 slika H preko BC, po S-K-S poučku znamo da su $\triangle HCD$ i $\triangle H_1CD$ slični i znamo da je četverokut $DCAF$ tetivan pa vrijedi $\angle BCH_1 = \angle DCH_1 = \angle DCH = \angle DCF = \angle DAF = \angle H_1AB$, odnosno H_1 leži na kružnici opisanoj $\triangle ABC$.

2. $HM = MH', \angle HMB = \angle CMH', BM = MC => \triangle HMB$ i $\triangle CMH'$ su sukladni po S-K-S poučku i BC raspolavlja HH' pa je $BH'CH$ paralelogram pa $HC||BH'$ i HC je okomito na AB, slijedi da je i BH' okomito na AB, analogno dobijemo da je $H'C$ okomito na AC pa $\angle ABH' + \angle ACH' = 90 + 90 = 180 => H'$ leži na kružnici opisanoj $\triangle ABC$ i $\angle ACH' = 90$ pa su A, O, H' kolinearne.

3. Promatramo homotetiju iz polovišta OH s faktorom $\frac{1}{2}$, ona šalje točke A, B, C redom u polovišta AH, BH, CH, preslike ortocentra preko polovišta stranica šalje u odgovarajuća polvišta stranica trokuta, a preslike ortocentra preko stranica šalje unožišta okomica iz H na stranice trokuta, odnosno u nožišta visina trokuta $\triangle ABC$, a to je traženih 9 točaka koje leže na slici opisane kružnice $\triangle ABC$ pa su i one na kružnici.

4. $\angle MFH = \angle MFC = \angle MCF = 90 - \angle FBC = 90 - \angle ABC = \angle BAD = \angle FAH$ pa prema poučku o kutu između tetive i tangente FM je tangenta na tu kružnicu, analogno dokažemo za EM.

5. Po 2. zadatku $\angle AQH = \angle AQM' = 90 => Q$ leži na kružnici s promjerom AH, a to je tražena kružnica.

6. Promatrajmo kružnice opisane tetivnim četverokutima $AQEF, EFBC, AQBC$, tada su traženi pravci njihove radikalne osi i sijeku se u radikalnom središtu.

7. P' je presjek kružnice promjera AH s kružnicom opisanom $\triangle BHC$. Neka je točka A' takva da je $ABA'C$ paralelogram $=> \angle BA'C = \angle BAC = 180 - \angle FHE = 180 - \angle BHC => A'$ leži na kružnici opisanoj $\triangle HBC. => \angle HP'A' = \angle HCA' = \angle ACA' - \angle ACH = (180 - \alpha) - (90 - \alpha) = 90 = 180 - \angle HP'A => A, P', A'$ su kolinearne, AA' je dijagonala paralelograma pa raspolavlja dužinu $BC => AA'$ je težišnica u $\triangle ABC$. Sada promatramo tetivne četverokute $AQHP, PHBC, AQBC => AQ, HP, BC$ su im radikalne osi pa se sijeku u jednoj točki i to je točka G(koja je presjek AQ, BC) $=> GH$ je okomito na AM.

8. Promatramo stranice trokuta kao tangente iz vrhova trokuta na upisanu kružnicu pa su odsječci tangente iz istog vrha jednaki.
   Slijedi $AF = AE = x$, $BD = BF = y$, $CE = CD = z$. Sada imamo 3 sustava jednadžbi s tri nepoznanice
   $x + y = c$
   $y + z = a$
   $x + z = b$

   Iz toga dobijemo

   $BD = y = \frac{a+c-b}{2}$,
   $CE = z = \frac{a+b-c}{2}$
   $AF = x = \frac{b+c-a}{2}$

Neka su E_1, F_1 redom dirališta A-pripisane kružnice s pravcima AC i AB. Promatramo stranice trokuta kao tangente iz vrhova $\triangle ABC$ na A-pripisanu kružnicu, slijedi: $BX = BF_1 = x_1$, $CX = CE_1 = y_1$
$AF_1 = AE_1$
$<=> c + x_1 = b + y_1 <=> x_1 - y_1 = b - c$ znamo da $x_1 + y_1 = BC = a$ pa dobijemo
$BX = x_1 = \frac{a+b-c}{2} = CD$ pa $BD = CX$

9. Uvedimo B', C' kao presjeke tangente na opisanu kružnicu $\triangle ABC$ u točci D' sa stranicama AC, AB. Kako su BD i $B'D'$ okomiti na DD', slijedi $BD || B'D'$ pa postoji homotetija iz točke A koja šalje $\triangle AB'C'$ u $\triangle ABC$ te upisanu kružnicu(koja je A-pripisana $\triangle AB'C'$) u A- pripisanu i diralište upisane u diralište A- pripisane tj. šalje točku D' u točku X iz čega slijedi da su točke A, D', X kolinearne.

10. Neka su B_1, C_1 presjeci tangente na A-pripisanu u X' i pravaca AB, AC. $\angle AX'I_A = 90 = \angle BXI_A \implies BC \parallel B'C' \implies$ postoji homotetija iz točke A koja šalje $\triangle ABC$ u $\triangle AB'C'$ pa također šalje dirališta upisanih kružnica tih trokuta jedno u drugo, odnosno šalje D u X' iz čega slijedi da su točke A, D i X' kolinearne.

11. I, M su redom polovišta DD', DX pa je IM srednjica u $\triangle D'DX => IM \parallel AD'$

12. Neka je K nožište visine iz A na BC. Iz 9. zadatka znamo da su točke A, D', X kolinearne. $AK \parallel DD'$ pa postoji homotetija iz točke X koja šalje $\triangle XD'D$ u $\triangle XAK$, također šalje polovište stranice DD' u polovište stranice AK iz čega slijedi da su točke P, I i X kolinearne.

13. Po 10.zadatku znamo da su točke A, D, X' kolinearne. Neka je K nožište visine iz A na BC. $\angle X'XD = \angle DKA = 90 \implies X'X \parallel AK \implies$ postoji homotetija iz točke D koja šalje $\triangle DXX'$ u $\triangle DKA$, također šalje polovište stranice XX' u polovište $AK \implies$ točke P, D i I_A su kolinearne.

6. Teži zadaci

14. https://artofproblemsolving.com/community/c6h474837p2659395

15. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1078898p4728597

16. https://artofproblemsolving.com/community/c6h581642p3436518

17. HMO 2015 2.dan

18. https://artofproblemsolving.com/community/c6h97484p550561